រៀបរៀងដោយ លឹម ផល្គុន
បរិញ្ញាបត្រផ្នែកគណិតវិទ្យា

◊◊◊◊◊◊◊◊◊

គណិតវិទ្យា

ត្រៀមប្រឡងអាហារូបករណ៍

ភាគ១

រួមមាន ៖

-វិញ្ញាសាជ្រើសពិសេស
-ដំណោះស្រាយក្បោះក្បាយ
-សង្ខេបមេរៀន និង ល្បិចដោះស្រាយ

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x).dx = \int_{a_1}^{a_{n+1}} f(x).dx$$

គណិតវិទ្យា

សម្រាប់ត្រៀមប្រឡងអាហារូបករណ៍

Tel: 017 768 246
www.mathtoday.wordpress.com

គណៈកម្មការនិពន្ធ និង រៀបរៀង

លឹម ផល្គុន   និង   អ៊ឹង សំណាង

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យបច្ចេកទេស

លោក យ៉ង់ ឆារី
លោក លឹម ឆុន
លោក សែន ពិសិដ្ឋ

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

លោក លឹម មិត្តសិរ

ការិយកុំព្យូទ័រ

លោក អ៊ឹង សំណាង

អារម្ភកថា

សួស្តីមិត្តអ្នកសិក្សាជាទីស្រឡាញ់រាប់អាន !
សៀវភៅ គណិតវិទ្យាជ្រើសរើសដែលលោកអ្នកកំពុងតែកាន់អាននេះ ខ្ញុំបាទបានរៀបចំឡើងសម្រាប់ទុកជាឯកសារសម្រាប់អ្នកសិក្សាដែលមានបំណងត្រៀមប្រឡងយកអាហារូបករណ៍ទៅសិក្សានៅបរទេស និង សម្រាប់ត្រៀមប្រឡងអាហារូបករណ៍ចូលគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សានានាក្នុងប្រទេស។ យើងខ្ញុំបានជ្រើសរើសលំហាត់ពិសេសៗមកធ្វើដំណោះស្រាយ យ៉ាងពិស្តារ ព្រមទាំងមានលំហាត់អនុវត្តន៍សម្រាប់អ្នកសិក្សាហ្វឹកហាត់ដោះស្រាយដោយខ្លួនឯង។

យើងខ្ញុំសង្ឃឹមថា សៀវភៅមួយក្បាលនេះ នឹងអាចចូលរួមផ្តល់នូវគំនិត និង វិធីសាស្រ្តថ្មីៗក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់គណិតវិទ្យាកំរិតអាហារូបករណ៍ ចំពោះលោកអ្នកសិក្សាជាពុំខានឡើយ ។

ជាទីបញ្ចប់ខ្ញុំបាទសូមជូនពរចំពោះលោកអ្នក សូមមានសុខភាពល្អ មានប្រាជ្ញាឈ្លាសវៃ និង ទទួលបានជោគជ័យក្នុងគ្រប់ភារកិច្ច ។

បាត់ដំបងថ្ងៃទី១០ឧសភា ឆ្នាំ២០១២
អ្នកនិពន្ធ និង ស្រាវជ្រាវ

លឹម ផល្គុន

Tel :017 768 246
Email: lim_phalkun@ymail.com
Website: www.mathtoday.wordpress.com

វិញ្ញាសាទី០១

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-គេមានសមីការ $z^3-(4+3i)z^2+2(1+5i)z+4(1-2i)=0$

ក/កំណត់ចំនួនពិត α ដើម្បីឲ្យ $z=\alpha$ ជាឬសមួយរបស់(E) ។

ខ/ចូរសរសេរសមីការ(E)ជារាង $(z-\alpha)(z^2+pz+q)=0$

ដែល p និង qជាចំនួនកុំផ្លិចត្រូវកំណត់ ។

គ/ដោះស្រាយសមីការ(E)ក្នុងសំណុំកុំផ្លិច ។

II-គេមានអនុគមន៍ $f(n)=\dfrac{an^2+bn+c}{2^n}$ ដែល $n\in IN$

ក/កំណត់បីចំនួនពិត a, b , c ដើម្បីឲ្យបាន

$f(n+1)-f(n)=\dfrac{n^2}{2^n}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ ។

ខ/ទាញរកផលបូក $S_n=\dfrac{1^2}{2}+\dfrac{2^2}{2^2}+\dfrac{3^2}{2^3}+....+\dfrac{n^2}{2^n}$

រួចគណនាលីមីតនៃ S_n កាលណា $n\to+\infty$ ។

III-គណនាអាំងតេក្រាល $\mathbf{I = \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{x^3+1}}.dx}$

IV-គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $\mathbf{(E): xy' + 3y = 4x + 9}$

ក/កំណត់ពីរចំនួនពិត α និង β ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ $\mathbf{y_1 = \alpha x + \beta}$

ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ $\mathbf{(E)}$ ។

ខ/រកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ $\mathbf{(E)}$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-គេមានសមីការ $\mathbf{z^3 - (4+3i)z^2 + 2(1+5i)z + 4(1-2i) = 0}$

ក/កំណត់ចំនួនពិត α ៖

ដើម្បីឲ្យ $\mathbf{z = \alpha}$ ជាឫសមួយរបស់$\mathbf{(E)}$លុះត្រាតែវាផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

គេបាន $\mathbf{\alpha^3 - (4+3i)\alpha^2 + 2(1+5i)\alpha + 4(1-2i) = 0}$

$$\mathbf{(\alpha^3 - 4\alpha^2 + 2\alpha + 4) + i(-3\alpha^2 + 10\alpha - 8) = 0}$$

គេទាញ $\mathbf{\begin{cases} \alpha^3 - 4\alpha^2 + 2\alpha + 4 = 0 \\ -3\alpha^2 + 10\alpha - 8 = 0 \end{cases}}$

សមមូល $\begin{cases}(\alpha-2)(\alpha^2-2\alpha-2)=0\\(\alpha-2)(-3\alpha+4)=0\end{cases}$

គេទាញបាន $\alpha=2$ ជាឫសតែមួយគត់របស់ប្រពន្ធ័សមីការខាងលើ

ដូចនេះ $\alpha=2$ ជាចំនួនពិតដែលត្រូវរក ។

ខ/សរសេរសមីការ (E) ជារាង $(z-\alpha)(z^2+pz+q)=0$

សមីការ $(z-\alpha)(z^2+pz+q)=0$ អាចសរសេរជា ៖

$$z^3+(p-\alpha)z^2+(q-\alpha p)z-\alpha q=0 \quad (1)$$

ដោយ $z^3-(4+3i)z^2+2(1+5i)z+4(1-2i)=0 \quad (2)$

ធ្វើការប្រៀបធៀបសមីការ(1) និង (2) គេទាញបាន ៖

$\begin{cases}p-\alpha=-4-3i\\q-\alpha p=2+10i\\-\alpha q=4-8i\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}p-2=-4-3i\\q-2p=2+10i\\-2q=4-8i\end{cases}$ (ព្រោះ $\alpha=2$)

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេបាន $p=-2-3i$; $q=-2+4i$

ដូចនេះ $(E):(z-2)[z^2-(2+3i)z-2+4i]=0$ ។

គ/ដោះស្រាយសមីការ(E)ក្នុងសំណុំកុំផ្លិច ៖

គេមាន $(E):(z-2)[z^2-(2+3i)z-2+4i]=0$

គេទាញ $z-2=0$ នាំឲ្យ $z=2$

ហើយ $z^2-(2+3i)z-2+4i=0$

$\Delta=(2+3i)^2-4(-2+4i)=3-4i=(2-i)^2$

គេទាញឫស $\left[\begin{array}{l} z_1=\dfrac{2+3i-2+i}{2}=2i \\ z_2=\dfrac{2+3i+2-i}{2}=2+i \end{array}\right.$

ដូចនេះសំណុំឫសសមីការ $z\in\{2\ ,\ 2i\ ,\ 2+i\ \}$ ។

II-គេមានអនុគមន៍ $f(n)=\dfrac{an^2+bn+c}{2^n}$ ដែល $n\in IN$

ក/កំណត់បីចំនួនពិត a,b,c ៖

$$f(n+1)-f(n)=\frac{n^2}{2^n}\quad(1)$$

មាន $f(n+1)=\dfrac{a(n+1)^2+b(n+1)+c}{2^{n+1}}=\dfrac{an^2+(2a+b)n+a+b+c}{2^{n+1}}$

គេបាន $f(n+1)-f(n)=\frac{-an^2+(2a-b)n+a+b-c}{2^{n+1}}$ (2)

ដោយប្រៀបធៀបសមីការ (1) និង (2) គេបាន ៖

$\begin{cases}-a=2\\2a-b=0\\a+b-c=0\end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases}a=-2\\b=-4\\c=-6\end{cases}$ ។ដូចនេះ $a=-2$, $b=-4$, $c=-6$

ខ/ទាញរកផលបូក $S_n=\frac{1^2}{2}+\frac{2^2}{2^2}+\frac{3^2}{2^3}+....+\frac{n^2}{2^n}$

ចំពោះ $a=-2$, $b=-4$, $c=-6$ គេបាន $f(n)=-\frac{2n^2+4n+6}{2^n}$

និង $f(n+1)-f(n)=\frac{n^2}{2^n}$ (តាមសម្រាយខាងលើ) ។

គេបាន $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2^k}=\sum_{k=1}^{n}[f(k+1)-f(k)]=f(n+1)-f(1)$

តែ $f(1)=-\frac{2+4+6}{2}=-6$ និង $f(n+1)=-\frac{n^2+4n+6}{2^n}$

ដូចនេះ $S_n=6-\frac{n^2+4n+6}{2^n}$ និង $\lim_{n\to\infty}S_n=6$ ។

III-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{x^3+1}}.dx$

គេអាចសរសេរ $I=\int_0^1 \frac{x^{\frac{1}{2}}.dx}{\sqrt{x^3+1}}$ តាង $t=x^{\frac{3}{2}}$ នោះ $dt=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}.dx$

បើ $x=0$ នោះ $t=0$ និង $x=1$ នោះ $t=1$ ។

គេបាន $I=\frac{2}{3}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$ តាង $t=\tan\varphi$ នោះ $dt=(1+\tan^2\varphi)d\varphi$

បើ $t=0$ នោះ $\varphi=0$ និង $t=1$ នោះ $\varphi=\frac{\pi}{4}$ ។

គេបាន $I=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1+\tan^2\varphi)d\varphi}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\cos\varphi}=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\varphi.d\varphi}{1-\sin^2\varphi}$

តាង $u=\sin\varphi$ នោះ $du=\cos\varphi.d\varphi$

បើ $\varphi=0$ នោះ $u=0$ និង $\varphi=\frac{\pi}{4}$ នោះ $u=\frac{1}{\sqrt{2}}$

គេបាន $I=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{du}{1-u^2}=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u})du$

$$I=\frac{1}{3}\left[-\ln|1-u|+\ln|1+u|\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{3}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$$

ដោយ $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=(\sqrt{2}+1)^2$ នោះ $I=\frac{1}{3}\ln(\sqrt{2}+1)^2$

ដូចនេះ $I=\frac{2}{3}\ln(\sqrt{2}+1)$ ។

IV-គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល **(E):** $xy'+3y=4x+9$

ក/កំណត់ពីរចំនួនពិត α និង β

ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ $y_1=\alpha x+\beta$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ **(E)**

លុះត្រាតែវាផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ **(E)** ។

គេបាន $xy'_1+3y_1=4x+9$ **(1)**

ដោយ $y_1=\alpha x+\beta$ នោះ $y'_1=\alpha$ ។

សមីការ (1) អាចសរសេរ ៖

$$\alpha x+3(\alpha x+\beta)=4x+9$$
$$4\alpha x+3\beta=4x+9$$

គេទាញ $\alpha=1\ ;\beta=3$ ។

ខ/រកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E)

គេមាន $xy'_1 + 3y_1 = 4x + 9$ (1)

$$xy' + 3y = 4x + 9 \quad (2)$$

ដកសមីការ (2) និង (1) អង្គនិងអង្គគេបាន ៖

$x(y' - y_1') + 3(y - y_1) = 0$ (3)

តាង $u = y - y_1$ នោះ $u' = y' - y_1'$

តាមសមីការ (3) គេបាន $xu' + 3u = 0$ នាំឲ្យ $\dfrac{u'}{u} = -\dfrac{3}{x}$

ឬ $(\ln u)' = -\dfrac{3}{x}$ នាំឲ្យ $\ln u = -\int \dfrac{3}{x}dx = -3\ln|x| + c_1$

គេទាញ $u = e^{-3\ln|x| + c_1} = \dfrac{1}{|x|^3}.e^{c_1} = \dfrac{k}{x^3}$;$k \in IR$

ដោយ $u = y - y_1$ នោះ $y = u + y_1 = \dfrac{k}{x^3} + x + 3$

ដូចនេះ $y = x + 3 + \dfrac{k}{x^3}$,$k \in IR$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ(E)។

វិញ្ញាសាទី០២

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^a \sqrt{\frac{x}{x^n + a^n}}.dx$ ដែល $a > 0$ ។

ក/កំណត់តម្លៃ n ដើម្បីឲ្យ I_n មានតម្លៃមិនអាស្រ័យនឹង a ។

ខ/គណនា I_n ចំពោះតម្លៃ n ដែលបានរកឃើញខាងលើ ។

II-គេឲ្យសមីការដឺក្រេទីបី $(E): z^3 - (3+4i)z^2 - (1-6i)z + 3 - 2i = 0$

ក/កំណត់ចំនួនពិត b ដើម្បីឲ្យ $z = ib$ ជាឬសមួយរបស់(E) ។

ខ/បង្ហាញថាសមីការ (E) មានឬសមួយជាចំនួនពិត ហើយឬសពីរទៀតជាចំនួនកុំផ្លិចរួចរកឬសទាំងនោះ ។

គ/ក្នុងប្លង់កុំផ្លិចប្រកបដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j})$ គេមានបីចំនុច A,B,C មានអាហ្វិក z_1, z_2, z_3 ជាឬសនៃ (E) ។ ចូរដៅចំនុច A,B,C រួចរកប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC ។

III-គេមានស៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ ៖

$u_1 = -1$ និង $u_{n+1} = \sqrt{1+\frac{1}{n}}\,u_n + \frac{\sqrt{n+1}}{2^n}$ គ្រប់ $n \in IN$ ។

ក/រកប្រភេទនៃស៊ីត $v_n = \frac{u_{n+1}}{\sqrt{n+1}} - \frac{u_n}{\sqrt{n}}$ រួចគណនា $S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$ ។

ខ/ទាញរកតួទូទៅ u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

IV-គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ៖

$$(E): x^2y'' + (4x - 2x^2)y' + 2(x-1)^2y = 0$$

$$(F): y'' - 2y' + 2y = 0$$

ក/ចូរបង្ហាញថាបើ $y = x^2f(x)$ ជាចម្លើយរបស់សមីការ (F)

នោះអនុគមន៍ f ជាចម្លើយរបស់សមីការ (E) ។

ខ/ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយរបស់សមីការ (E) ។

ដំណោះស្រាយ

I-ក/កំណត់តម្លៃ **n** ដើម្បីឲ្យ I_n មានតម្លៃមិនអាស្រ័យនឹង **a**

គេមាន $I_n = \int_0^a \sqrt{\frac{x}{x^n + a^n}}.dx$ ដែល $a > 0$

តាង $x = at$ នោះ $dx = a.dt$

បើ $x = 0$ នោះ $t = 0$ ហើយ $x = a$ នោះ $t = 1$

គេបាន $I_n = \int_0^1 \sqrt{\frac{at}{a^n t^n + a^n}}a.dt = (a)^{\frac{3-n}{2}} \int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{2}}dt}{\sqrt{t^3 + 1}}$

ដើម្បីឲ្យ I_n មានតម្លៃមិនអាស្រ័យនឹង **a** លុះត្រាតែ $\frac{3-n}{2} = 0$

គេទាញបាន $n = 3$ ។

ខ/គណនា I_n ចំពោះតម្លៃ **n** ដែលបានរកឃើញខាងលើ

បើ $n = 3$ គេបាន $I_3 = \int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{2}}dt}{\sqrt{t^3 + 1}}$ តាង $u = t^{\frac{3}{2}}$ នោះ $du = \frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}.dt$

បើ $t = 0$ នោះ $u = 0$ និង $t = 1$ នោះ $u = 1$ ។

គេបាន $I_3 = \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = \frac{2}{3}\left[\ln|u+\sqrt{u^2+1}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\ln(1+\sqrt{2})$

ដូចនេះ $I_3 = \frac{2}{3}\ln(1+\sqrt{2})$ ។

II-គេឲ្យសមីការដឺក្រេទីបី $(E): z^3-(3+4i)z^2-(1-6i)z+3-2i=0$

ក/កំណត់ចំនួនពិត b

ដើម្បីឲ្យ $z=ib$ ជាឫសមួយរបស់(E)លុះត្រាតែវាផ្ទៀងផ្ទាត់(E)

គេបាន $i^3b^3-(3+4i)i^2b^2-(1-6i)ib+3-2i=0$

$$-ib^3+3b^2+4ib^2-ib-6b+3-2i=0$$

$$(3b^2-6b+3)+i(-b^3+4b^2-b-2)=0$$

គេទាញ $\begin{cases} 3b^2-6b+3=0 & (1) \\ -b^3+4b^2-b-2=0 & (2) \end{cases}$

តាម (1) គេបាន $3(b-1)^2=0$ នាំឲ្យ $b=1$ ។

យក $b=1$ ជួសក្នុង (2) គេបាន $-1+4-1-2=0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់។

ដូចនេះ $b=1$ ។

ខ/បង្ហាញថាសមីការ (E) មានឫសមួយជាចំនួនពិត ៖

តាង $z = a$ ជាឫសពិតរបស់សមីការ (E) គេបាន ៖

$$a^3 - (3+4i)a^2 - (1-6i)a + 3 - 2i = 0$$
$$a^3 - 3a^2 - 4ia^2 - a + 6ia + 3 - 2i = 0$$
$$(a^3 - 3a^2 - a + 3) + i(-4a^2 + 6a - 2) = 0$$

គេទាញបាន $\begin{cases} a^3 - 3a^2 - a + 3 = 0 \\ -4a^2 + 6a - 2 = 0 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} (a-3)(a-1)(a+1) = 0 \\ (a-1)(-4a+2) = 0 \end{cases}$

ប្រពន្ធ័សមីការមានឫសតែមួយគត់គឺ $a = 1$ ។

ដោះស្រាយសមីការ (E) :

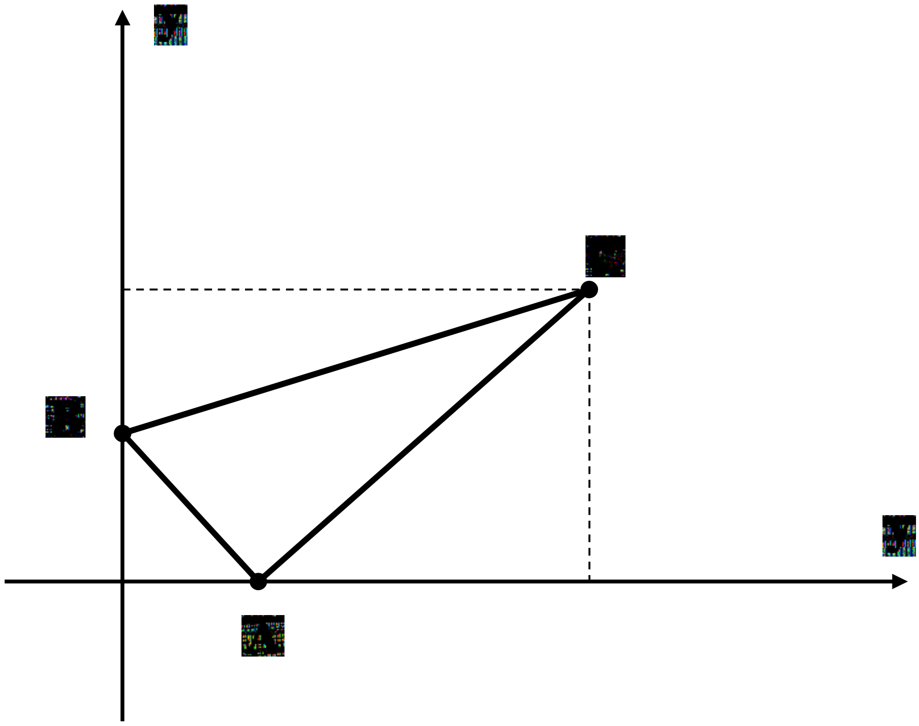
តាមសម្រាយខាងលើគេទាញបាន $z_1 = i\ ;\ z_2 = 1$ ជាឫសនៃ (E)

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត $z_1 + z_2 + z_3 = 3 + 4i$

គេទាញ $z_3 = 3 + 4i - i - 1 = 2 + 3i$ ។

ដូចនេះ $z_1 = i\ ;\ z_2 = 1\ ,\ z_3 = 3 + 2i$ ។

គ/ ដៅចំនុច A,B,C រួចរកប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC



គេមាន $A(1);B(i)\ ;\ C(3+2i)$

អាហ្វិកនៃ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$ គឺ $z_B - z_A = -1+i$ និង $z_C - z_A = 2+2i$

គេមាន $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{2+2i}{-1+i} = -2i$ នាំឲ្យ $Arg(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}) = \dfrac{\pi}{2}$

នាំឲ្យ $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ ។ ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A ។

III-ក/រកប្រភេទនៃស្វ៊ីត $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{u_n}{\sqrt{n}}$

មាន $u_1 = -1$ និង $u_{n+1} = \sqrt{1+\dfrac{1}{n}}\,u_n + \dfrac{\sqrt{n+1}}{2^n}$ គ្រប់ $n \in IN$

គេបាន $u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}u_n + \dfrac{\sqrt{n+1}}{2^n} = \sqrt{n+1}(\dfrac{u_n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{2^n})$

នាំឲ្យ $\dfrac{u_{n+1}}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{u_n}{\sqrt{n}} = \dfrac{1}{2^n}$ ឬ $v_n = \dfrac{1}{2^n}$

គេបាន $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{2^n}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2}$ ថេរ

ដូចនេះ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = \dfrac{1}{2}$ ។

គណនា $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} v_k$

គេបាន $S_n = v_1 \times \dfrac{1-q^n}{1-q}$ តែ $v_1 = \dfrac{u_2}{\sqrt{2}} - u_1$

និង $u_2 = \sqrt{2}u_1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ នោះ $v_1 = -\dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{1}{2}$

គេបាន $S_n=\frac{1}{2}.\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}$

ដូចនេះ $S_n=1-\frac{1}{2^n}$ ។

ខ/ទាញរកតួទូទៅ u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

គេមាន $v_n=\frac{u_{n+1}}{\sqrt{n+1}}-\frac{u_n}{\sqrt{n}}$

$$\sum_{k=1}^{n-1}v_k=\sum_{k=1}^{n-1}(\frac{u_{k+1}}{\sqrt{k+1}}-\frac{u_k}{\sqrt{k}})$$

$$S_{n-1}=\frac{u_n}{\sqrt{n}}-u_1$$

គេទាញ $u_n=\sqrt{n}(S_{n-1}+u_1)$

ដោយ $S_{n-1}=1-\frac{1}{2^{n-1}}$ និង $u_1=-1$

ដូចនេះ $u_n=-\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$ ។

IV-គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ៖

$(E): x^2y'' + (4x - 2x^2)y' + 2(x-1)^2y = 0$

$(F): y'' - 2y' + 2y = 0$

ក/ការបង្ហាញ

បើ $y = x^2f(x)$ ជាចម្លើយរបស់សមីការ (F) នោះ y, y', y''

ត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ (F) ។

គេមាន $y' = 2xf(x) + x^2f'(x)$

$$y'' = 2f(x) + 2xf'(x) + 2xf'(x) + x^2f''(x)$$

$$y'' = 2f(x) + 4xf'(x) + x^2f''(x)$$

យក y, y', y'' ជួសក្នុងសមីការ (F) គេបាន ៖

$$2f(x) + 4xf'(x) + x^2f''(x) - 4xf(x) - 2x^2f'(x) + 2x^2f(x) = 0$$
$$x^2f''(x) + (4x - 2x^2)f'(x) + 2(x-1)^2f(x) = 0$$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ f ជាចម្លើយរបស់ (E) ។

ខ/ដោះស្រាយសមីការ (F)

គេមាន $(F): y''-2y'+2y=0$

សមីការសម្គាល់ $r^2-2r+2=0$

$\Delta'=1-2=-1=i^2$

គេទាញឫស $r_1=1-i\ ;\ r_2=1+i$ នាំឲ្យ $\alpha=1\ ,\ \beta=1$

ដូចនេះ $y=(A\cos x+B\sin x)e^x\ ;\ A,B\in IR$ ។

ទាញរកចម្លើយរបស់សមីការ (E)៖

គេមាន $y=x^2f(x)$ នាំឲ្យ $f(x)=\dfrac{y}{x^2}=(A\cos x+B\sin x)\dfrac{e^x}{x^2}$

ដូចនេះ $f(x)=(A\cos x+B\sin x)\dfrac{e^x}{x^2}\ ;A,B\in IR$ ។

វិញ្ញាសាទី០៣

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{a^{2x}}{1+a^{2x-1}}$ ដែល $a>0$ និង $a\neq 1$ ។

ចូរស្រាយថាគ្រប់ $\varphi\in IR$ គេបាន $f(\sin^2\varphi)+f(\cos^2\varphi)=a$ ។

II-គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (a_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} a_1=1 \\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{\sqrt[3]{1+n\,a_n^3}} \end{cases}$

ដែល $n=1\,,\,2\,,\,3\,,...$ ។

ចូរគណនាកន្សោម a_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

III-គេឲ្យសមីការ $(E): z^2-(4+3i)z+a+9i=0$

ក/កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឲ្យសមីការ(E)មានឫសមួយជាចំនួនពិត

ហើយឫសមួយទៀតជាចំនួនកុំផ្លិច។

ខ/ដោះស្រាយសមីការ(E)ចំពោះតម្លៃaដែលបានរកឃើញខាងលើ

IV-គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^{\pi} x\sin^n x.dx$ ដែល $n = 0,1,2,...$ ។

ក/ចូរស្រាយថា $I_n = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.dx$ ។

ខ/ចំពោះគ្រប់ $n \geq 2$ ស្រាយថា $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-ស្រាយថាគ្រប់ $\varphi \in IR$ គេបាន $f(\sin^2\varphi) + f(\cos^2\varphi) = a$

គេមានអនុគមន៍ $f(x) = \frac{a^{2x}}{1 + a^{2x-1}}$ ដែល $a > 0$ និង $a \neq 1$

យក $u = \sin^2\varphi$ និង $v = \cos^2\varphi$ នោះ $u + v = 1$ ។

យើងនឹងស្រាយថាបើ $u + v = 1$ នោះ $f(u) + f(v) = a$ ។

គេបាន $f(u) + f(v) = \frac{a^{2u}}{1 + a^{2u-1}} + \frac{a^{2v}}{1 + a^{2v-1}}$

$$= \frac{a^{2u}(1 + a^{2v-1}) + a^{2v}(1 + a^{2u-1})}{(1 + a^{2u-1})(1 + a^{2v-1})}$$

$$f(u)+f(v)=\frac{a^{2u}+a^{2u+2v-1}+a^{2v}+a^{2u+2v-1}}{1+a^{2v-1}+a^{2u-1}+a^{2u+2v-2}}$$ ដោយ $u+v=1$

$$=\frac{a^{2u}+a^{2-1}+a^{2v}+a^{2-1}}{1+a^{2v-1}+a^{2u-1}+a^{2-2}}$$

$$=\frac{a^{2u}+a^{2v}+2a}{a^{2u-1}+a^{2v-1}+2}$$

$$=\frac{a(a^{2u-1}+a^{2v-1}+2)}{a^{2u-1}+a^{2v-1}+2}=a$$

ដូចនេះ $f(\sin^2\varphi)+f(\cos^2\varphi)=a$ ។

II-គណនាកន្សោម a_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

គេមាន $a_1=1\ ,\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{\sqrt[3]{1+n\,a_n^3}}$ ដែល $n=1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\dots$ ។

លើកអង្គទាំងពីរជាគូបគេបាន $a_{n+1}^3=\dfrac{a_n^3}{1+na_n^3}$

គេទាញ $\dfrac{1}{a_{n+1}^3}=\dfrac{1+na_n^3}{a_n^3}=\dfrac{1}{a_n^3}+n$ ឬ $\dfrac{1}{a_{n+1}^3}-\dfrac{1}{a_n^3}=n$

គេបាន $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{a_{k+1}^3}-\frac{1}{a_k^3}\right)=\sum_{k=1}^{n-1}(k)$

នាំឲ្យ $(\frac{1}{a_2^3}-\frac{1}{a_1^3})+(\frac{1}{a_3^3}-\frac{1}{a_2^3})+...+(\frac{1}{a_n^3}-\frac{1}{a_{n-1}^3})=\frac{(n-1)n}{2}$

ឬ $\frac{1}{a_n^3}-\frac{1}{a_1^3}=\frac{n^2-n}{2}$ ដោយ $a_1=1$

ដូចនេះ $a_n=\sqrt[3]{\frac{2}{n^2-n+2}}$ ។

III-គេឲ្យសមីការ $(E): z^2-(4+3i)z+a+9i=0$

ក/កំណត់តម្លៃ a ៖

តាង $z=\alpha$ ជាឫសពិតមួយរបស់សមីការ (E) នោះវាផ្ទៀងផ្ទាត់

នឹងសមីការ (E) គឺ $\alpha^2-(4+3i)\alpha+a+9i=0$

ឬ $(\alpha^2-4\alpha+a)+i(3\alpha-9)=0$ នាំឲ្យ $\begin{cases}\alpha^2-4\alpha+a=0\\3\alpha-9=0\end{cases}$

គេទាញ $\alpha=3$ ហើយ $9-4(3)+a=0$ នោះ $a=3$ ។

ដូចនេះ $a=3$ ។

ខ/ដោះស្រាយសមីការ(E)៖

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត បើ α , β ជាឬសរបស់សមីការ (E) នោះគេបាន

$\alpha+\beta=4+3i$ តែតាមសម្រាយខាងលើ $\alpha=3$ នោះ $\beta=1+3i$ ។

ដូចនេះឬសសមីការគឺ $\alpha=3 ; \beta=1+3i$ ។

IV-ក/ស្រាយថា $I_n=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x.dx$

គេមាន $I_n=\int_0^{\pi} x\sin^n x.dx$ ដែល $n=0,1,2,...$

តាង $x=\pi-t$ នោះ $dx=-dt$

បើ $x=0$ នោះ $t=\pi$ និង $x=\pi$ នោះ $t=0$

គេបាន $I_n=\int_{\pi}^{0}(\pi-t)\sin^n(\pi-t)(-dt)$

$$I_n=\int_0^{\pi}(\pi-t)\sin^n t.dt=\pi\int_0^{\pi}\sin^n tdt-\int_0^{\pi}t\sin^n t.dt$$

$$I_n = \pi \int_0^{\pi} \sin^n x.dx - I_n$$ នាំឲ្យ $$I_n = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \sin^n x.dx \quad (1)$$

គេមាន $$\int_0^{\pi} \sin^n x.dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^n x.dx \quad (2)$$

តាង $x = \pi - t$ នោះ $dx = -dt$

បើ $x = \frac{\pi}{2}$ នោះ $t = \frac{\pi}{2}$ និង $x = \pi$ នោះ $t = 0$

គេបាន $$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^n x.dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^n(\pi - t)(-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t.dt \quad (3)$$

តាម (2) និង (3) គេបាន $$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^n x.dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.dx \quad (4)$$

យក (4)ជំនួសក្នុង (1) គេបាន $$I_n = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.dx$$ ពិត ។

ខ/ចំពោះគ្រប់ $n \geq 2$ ស្រាយថា $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

គេមាន $I_n = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x . \sin x dx$

តាង $\begin{cases} u = \sin^{n-1} x \\ dv = \sin x.dx \end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases} du = (n-1)\cos x \sin^{n-2} x.dx \\ v = \int \sin x dx = -\cos x \end{cases}$

$$I_n = \pi \left[-\sin^{n-1} x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-2} x.dx$$

$$I_n = (n-1)\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x.dx$$

$$I_n = (n-1)\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x.dx - (n-1)\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.dx$$

$$I_n = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

គេទាញ $nI_n = (n-1) I_{n-2}$ ឬ $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ ។

ដូចនេះ $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ ។

វិញ្ញាសាទី០៤

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-គេឲ្យអនុគមន៍ $\mathbf{f}$ កំណត់ដោយ ៖

$\mathbf{f_m(x) = x^3 - (m+4)x^2 + 2(2m+3)x - 4m + 3}$ មានក្រាប $\mathbf{(c_m)}$

($\mathbf{m}$ ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រពិត) ។

ចូរកំណត់សមីការបន្ទាត់ថេរ $\mathbf{(\Delta)}$ មួយដែលប៉ះនឹងខ្សែកោង $\mathbf{(c_m)}$

ជានិច្ចគ្រប់តម្លៃ $\mathbf{m}$ ។

II-គេឲ្យស្វ៊ីត $\mathbf{(a_n)}$ កំណត់ដោយ $\begin{cases} \mathbf{a_1 = 1} \\ \mathbf{a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{2^n})} \end{cases}$

ដែល $\mathbf{n = 1, 2, 3, ...}$ ។

ក/រកប្រភេទនៃស្វ៊ីត $\mathbf{b_n = a_n - \frac{n}{2^n}}$ ។

ខ/គណនា $\mathbf{a_n}$ ជាអនុគមន៍នៃ $\mathbf{n}$ ។

III-គេឲ្យអាំងតេក្រាល ៖

$$I_n = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}.dx \quad \text{និង} \quad J_n = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x}.dx$$

ក/ចូរស្រាយថា $I_n = J_n$ ។

ខ/គណនា I_n និង J_n ។

IV-គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍កំណត់ពីសំណុំ IR ទៅ IR ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់

សមីការ $f(x+1) + x^2 f(x^3+1) = x^3 + \sqrt[3]{x}$ គ្រប់ $x \in IR$ ។

ចូរគណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_1^2 f(x).dx$ ។

V-ចូរកំណត់ចំនួនកុំផ្លិច z ដែលមានម៉ូឌុល $|z|$ ដោយដឹងថា ៖

$|z| + (1+i)z = 4 + 7i$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-កំណត់សមីការបន្ទាត់ថេរ (Δ)

គេមាន $f_m(x) = x^3 - (m+4)x^2 + 2(2m+3)x - 4m + 3$

តាង $(\Delta): y = \alpha x + \beta$ ជាបន្ទាត់ថេរដែលប៉ះនឹង (c_m) ត្រង់ចំនុច

$M_o(x_0, y_0)$ ចំពោះគ្រប់ $m \in IR$ ។

សមមូលគេបាន $\begin{cases} f(x_0) = \alpha x_0 + \beta \\ f'(x_0) = \alpha \end{cases}$

ដោយ $f'(x) = 3x^2 - 2(m+4)x + 2(2m+3)$

គេបាន $\begin{cases} x_0^3 - (m+4)x_0^2 + 2(2m+3)x_0 - 4m + 3 = \alpha x_0 + \beta \\ 3x_0^2 - 2(m+4)x_0 + 2(2m+3) = \alpha \end{cases}$

សមមូល $\begin{cases} x_0^3 - 4x_0^2 + 6x_0 - \alpha x_0 - \beta + 3 = m(x_0^2 - 4x_0 + 4) \\ 3x_0^2 - 8x_0 + 6 - \alpha = m(2x_0 - 4) \end{cases}$

ប្រពន្ធ័នេះពិត $\forall m \in IR$ លុះត្រាតែ ៖

$$\begin{cases} x_0^3 - 4x_0^2 + 6x_0 - \alpha x_0 - \beta + 3 = 0 & (1) \\ x_0^2 - 4x_0 + 4 = 0 & (2) \\ 3x_0^2 - 8x_0 + 6 - \alpha = 0 & (3) \\ 2x_0 - 4 = 0 & (4) \end{cases}$$

តាមសមីការ (2)និង(4) គេទាញបាន $x_0 = 2$ ។

តាមសមីការ (3) គេបាន $3(2)^2 - 8(2) + 6 - \alpha = 0$ នាំឲ្យ $\alpha = 2$

តាម (1) គេបាន $8 - 16 + 12 - 4 - \beta + 3 = 0$ នាំឲ្យ $\beta = 3$ ។

ដូចនេះ $(\Delta): y = 2x + 3$ ។

II-ក/រកប្រភេទនៃស្វ៊ីត $b_n = a_n - \frac{n}{2^n}$

គេបាន $b_n = a_n - \frac{n}{2^n}$ នាំឲ្យ $b_{n+1} = a_{n+1} - \frac{n+1}{2^{n+1}}$

ដោយ $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{2^n})$

គេបាន $b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{2^n}) - \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}(a_n - \frac{1}{2^n}) = \frac{1}{2}b_n$

ដូចនេះ (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = \frac{1}{2}$ ។

ខ/គណនា a_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

ដោយ (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q=\frac{1}{2}$ និងតួទីមួយ

$b_1=a_1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ នោះ $b_n=b_1\times q^{n-1}=\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2})^{n-1}=\frac{1}{2^n}$

តាម $b_n=a_n-\frac{n}{2^n}$ នោះ $a_n=b_n+\frac{n}{2^n}=\frac{1}{2^n}+\frac{n}{2^n}=\frac{n+1}{2^n}$

ដូចនេះ $a_n=\frac{n+1}{2^n}$ ។

III- /ចូរស្រាយថា $I_n=J_n$

មាន $I_n=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}.dx$ និង $J_n=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^n x}{\sin^n x+\cos^n x}.dx$

ចំពោះ $I_n=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}.dx$ តាង $x=\frac{\pi}{2}-t$ នោះ $dx=-dt$

បើ $x=\frac{\pi}{6}$ នោះ $t=\frac{\pi}{3}$ និង $x=\frac{\pi}{3}$ នោះ $t=\frac{\pi}{6}$

គេបាន $I_n = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^n(\frac{\pi}{2}-t)}{\sin^n(\frac{\pi}{2}-t)+\cos^n(\frac{\pi}{2}-t)}.(-dt)$

$$I_n = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^n t}{\cos^n t + \sin^n t}.dt = J_n$$

ដូចនេះ $I_n = J_n$ ។

ខ/គណនា I_n និង J_n ៖

គេបាន$I_n + J_n = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}.dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x}.dx$

$$I_n + J_n = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} dx = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$ តែ $I_n = J_n$

នោះ $2I_n = 2J_n = \frac{\pi}{6}$ នាំឲ្យ $I_n = J_n = \frac{\pi}{12}$ ។

ដូចនេះ$I_n = \frac{\pi}{12}$ និង $J_n = \frac{\pi}{12}$ ។

IV-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_1^2 f(x).dx$

-បើគេតាង $x=t+1$ នោះ $dx=dt$

ចំពោះ $x=1$ នោះ $t=0$ និង $x=2$ នោះ $t=1$ ។

គេបាន $I=\int_1^2 f(x).dx=\int_0^1 f(t+1).dt \quad (1)$

-បើគេតាង $x=t^3+1$ នោះ $dx=3t^2dt$

ចំពោះ $x=1$ នោះ $t=0$ និង $x=2$ នោះ $t=1$ ។

គេបាន $I=\int_1^2 f(x).dx=3\int_0^1 t^2 f(t+1).dt$

ឬ $\frac{1}{3}I=\int_0^1 t^2 f(t^3+1).dt \quad (2)$

បូកសមីការ (1) និង (2) គេបាន ៖

$$I+\frac{1}{3}I=\int_0^1 [f(t+1)+t^2f(t^3+1)].dt$$

ដោយ $f(x+1)+x^2f(x^3+1)=x^3+\sqrt[3]{x}$ គ្រប់ $x\in IR$ ។

គេបាន $\frac{4}{3}I = \int_0^1 (t^3 + \sqrt[3]{t}).dt = \left[\frac{1}{4}t^4 + \frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}\right]_0^1 = 1$

ដូចនេះ $I = \frac{3}{4}$ ។

V- កំណត់ចំនួនកុំផ្លិច z ដែលមានម៉ូឌុល $|z|$

គេមាន $|z| + (1+i)z = 4 + 7i$ (1)

តាង $z = x + iy$ ដែល $x, y \in IR$ ។

សមីការ (1) អាចសរសេរ ៖

$$\sqrt{x^2 + y^2} + (1+i)(x+iy) = 4 + 7i$$
$$\sqrt{x^2 + y^2} + x + iy + ix - y = 4 + 7i$$
$$(\sqrt{x^2 + y^2} + x - y) + i(x+y) = 4 + 7i$$

គេទាញបាន $\begin{cases} x + y = 7 & (2) \\ \sqrt{x^2 + y^2} + x - y = 4 & (3) \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេបានគូចម្លើយ $x = 3$, $y = 4$

ដូចនេះចំនួនកុំផ្លិចដែលត្រូវរកគឺ $z = 3 + 4i$ ។

វិញ្ញាសាទី០៥

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{(3m+1)x+m-m^2}{x+m}$

ដែល m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ និង $m\neq 0$ ។ (H_m) ជាក្រាបតាង f ។

ក/ចូរស្រាយថា f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើដែនកំណត់របស់វា។

ខ/កំណត់សមីការបន្ទាត់នឹងមួយដែលប៉ះ (H_m) ជានិច្ចគ្រប់ m ។

II-គេមានអនុគមន៍ $g(x)=2\cos^2 x-\cos x+1$ ដែល $x\in IR$

ក/ចូរកំណត់តម្លៃតូចបំផុតនៃ $g(x)$ ។

ខ/តាង $S_n=\sum_{k=0}^{n} g(\frac{x}{2^k})$ ។ ចូរគណនា $\lim_{n\to+\infty} S_n$ ។

III-គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_n=\int_0^1 \frac{t^{3n}}{1+t^3}.dt$ ដែល $n=0,1,2,...$ ។

ចូរគណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}(n I_n)$ ។

IV-ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមក្នុងសំណុំកុំផ្លិច ៖

ក/ $z^2-4z+7-4i=0$

ខ/$(1+i)z^2-2(1+3i)z+1+5i=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-ក/ស្រាយថា f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើដែនកំណត់របស់វា

គេមាន $f(x)=\dfrac{(3m+1)x+m-m^2}{x+m}$

ដែនកំណត់ $D_f=IR-\{-m\}$

ដេរីវេ ៖

$$f'(x)=\frac{(3m+1)(x+m)-(3m+1)x-m+m^2}{(x+m)^2}$$

$$=\frac{(3m+1)x+3m^2+m-(3m+1)x-m+m^2}{(x+m)^2}$$

$$=\frac{4m^2}{(x+m)^2}>0\ \forall x\in D_f\ ;\ m\neq 0$$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍កើនលើដែនកំណត់ D_f ។

ខ/កំណត់សមីការបន្ទាត់នឹងមួយដែលប៉ះ (H_m) ជានិច្ចគ្រប់ m៖

តាង $(d): y = ax + b$ ជាបន្ទាត់ដែលត្រូវរក ។

សមីការអាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វរវាង (d) និង (H_m)

$$\frac{(3m+1)x + m - m^2}{x+m} = ax + b$$

$$(x+m)(ax+b) = (3m+1)x + m - m^2$$

$$ax^2 + (am+b)x + bm = (3m+1)x + m - m^2$$

$$ax^2 + (am - 3m + b - 1)x + (bm - m + m^2) = 0 \quad (1)$$

ដើម្បីឲ្យបន្ទាត់ (d) ប៉ះនឹង (H_m) លុះត្រាតែសមីការ(1)មានឫស

ឌុបចំពោះគ្រប់តម្លៃ m ពោលគឺ $\Delta = 0$ គ្រប់ m ។

$$\Delta = (am - 3m + b - 1)^2 - 4a(bm - m + m^2)$$
$$= (a^2 - 10a + 9)m^2 - 2(a+3)(b-1)m + (b-1)^2$$

$\forall m \in IR : \Delta = 0$ សមមូល $\begin{cases} a^2 - 10a + 9 = 0 \\ (a+3)(b-1) = 0 \\ (b-1)^2 = 0 \end{cases}$

គេទាញបាន $a = 1, b = 1$ ឬ $a = 9, b = 1$ ។

ដូចនេះ $(d_1): y = x+1$ និង $(d_2): y = 9x+1$ ។

II-គេមានអនុគមន៍ $g(x) = 2\cos^2 x - \cos x + 1$ ដែល $x \in IR$

ក/កំណត់តម្លៃតូចបំផុតនៃ $g(x)$

គេមាន $g(x) = 2\cos^2 x - \cos x + 1$

$$= (\sqrt{2}\cos x - \frac{1}{2\sqrt{2}})^2 + \frac{7}{8}$$

ដើម្បីឲ្យ $g(x)$ មានតម្លៃតូចបំផុតលុះត្រាតែ ៖

$\sqrt{2}\cos x - \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0$ ឬ $\cos x = \frac{1}{4}$ ។

ដូចនេះតម្លៃតូចបំផុតនៃ $g(x)$ គឺ $g_{min}(x) = \frac{7}{8}$,

ខ/គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

គេមាន $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} g(\frac{x}{2^k})$ ដោយ $2\cos^2 x - 1 = \cos 2x$

នោះ $g(x) = 2\cos^2 x - 1 - \cos x = \cos 2x - \cos x$

គេបាន $S_n = \sum_{k=0}^{n}(\cos\frac{x}{2^{k-1}} - \cos\frac{x}{2^k}) = \cos 2x - \cos\frac{x}{2^n}$

ដូចនេះ $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}(\cos 2x - \cos\frac{x}{2^n}) = \cos 2x - 1 = -2\sin^2 x$

III-គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}(n I_n)$

គេមាន $I_n = \int_0^1 \frac{t^{3n}}{1+t^3}.dt$ ដែល $n = 0, 1, 2, ...$

គេបាន $I_{n+1} = \int_0^1 \frac{t^{3n+3}}{1+t^3}.dt$

$$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{t^{3n} + t^{3n+3}}{1+t^3}.dt = \int_0^1 t^{3n}.dt = \left[\frac{t^{3n+1}}{3n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{3n+1}$$

$I_n + I_{n+1} = \frac{1}{3n+1}$ (1) និង $I_{n-1} + I_n = \frac{1}{3n-2}$ (2)

គ្រប់ $t \in [0, 1]$ គេមាន $t^{3n} \ge t^{3n+3}$ នាំឲ្យ $\frac{t^{3n}}{1+t^3} \ge \frac{t^{3n+3}}{1+t^3}$

គេទាញ $\int_0^1 \frac{t^{3n}}{1+t^3}dt \ge \int_0^1 \frac{t^{3n+3}}{1+t^3}.dt$ ឬ $I_n \ge I_{n+1}$ គ្រប់ $n = 0, 1, 2, ...$

នាំឲ្យ (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ។ តាមលក្ខណៈនៃស្វ៊ីតចុះគេបាន ៖

$I_{n+1} \le I_n \le I_{n-1}$ នាំឲ្យ $\frac{I_{n+1}+I_n}{2} \le I_n \le \frac{I_n + I_{n-1}}{2}$ (3)

យកទំនាក់ទំនង(1)និង(2)ជំនួសក្នុង(3)គេបាន ៖

$\frac{1}{6n+2} \le I_n \le \frac{1}{6n-4}$ នាំឲ្យ $\frac{n}{6n+2} \le nI_n \le \frac{n}{6n-4}$

ដោយ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{6n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{6n-4} = \frac{1}{6}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty} (n I_n) = \frac{1}{6}$ ។

IV-ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមក្នុងសំណុំកុំផ្លិច ៖

ក/ $z^2 - 4z + 7 - 4i = 0$

$(z-2)^2 - (1+2i)^2 = 0$ នាំឲ្យ $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 1 - 2i$ ។

ខ/$(1+i)z^2 - 2(1+3i)z + 1 + 5i = 0$

ដោយ $a + b + c = 0$ គេទាញឫស $z_1 = 1$, $z_2 = \frac{1+5i}{1+i} = 3 + 2i$

ដូចនេះ $z_1 = 1$; $z_2 = 3 + 2i$ ។

វិញ្ញាសាទី០៦

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_n=\int_0^n \frac{dx}{8x^2+6x+1}$ ដែល $n>0$

គណនា I_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរកលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ ។

II-គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\frac{\tan\frac{x}{2}}{\cos x}$ ដែល $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ ។

ក/ចូរកំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីបាន ៖

$f(x)=\frac{a}{\sin 2x}+\frac{b}{\sin x}$ គ្រប់ $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ ។

ខ/តាង $S_n=\sum_{k=0}^{n} 2^k f(\frac{x}{2^k})$ ។ គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ។

III-គេឲ្យសមីការ $(E): x^3+px+q=0$

ក/កំណត់ពីរចំនួនពិត p និង q ដើម្បីឲ្យ $x=1+2i$ ជាឫសនៃ(E) ។

ខ/ចំពោះតម្លៃ p និង q ដែលបានរកឃើញខាងលើចូរដោះស្រាយ (E)

IV-គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ ៖

$$f(x)=\frac{(2m+1)x^2-(m^2-1)x+4}{x}$$ មានក្រាបតំនាង (c_m)

(m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ និង $m\neq -\frac{1}{2}$) ។

ក/កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (c_m) ។

ខ/កំណត់សមីការប៉ារ៉ាបូលនឹង (P) មួយដែលប៉ះនឹងអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (c_m) ជានិច្ចគ្រប់ m ។ ចូរសង់ (P) ។

ដំណោះស្រាយ

I-គណនា I_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរកលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

គេមាន $I_n=\int_0^n \frac{dx}{8x^2+6x+1}$ ដែល $n>0$

តាង $f(x)=\frac{1}{8x^2+6x+1}=\frac{1}{(2x+1)(4x+1)}$

សរសេរ $f(x)$ ជារាងកាណូនិច $f(x)=\frac{a}{2x+1}+\frac{b}{4x+1}$

គេបាន $\frac{a}{2x+1}+\frac{b}{4x+1}=\frac{1}{8x^2+6x+1}$

នាំឲ្យ $a(4x+1)+b(2x+1)=1$

ឬ $(4a+2b)x+(a+b)=1$

គេទាញ $\begin{cases}4a+2b=0\\ a+b=1\end{cases}$ នាំឲ្យ $a=-1\ ,\ b=2$

គេបាន $f(x)=-\frac{1}{2x+1}+\frac{2}{4x+1}$

$$I_n=\int_0^n f(x).dx=\int_0^n\left(\frac{2}{4x+1}-\frac{1}{2x+1}\right).dx$$

$$=\int_0^n\frac{2dx}{4x+1}-\int_0^n\frac{dx}{2x+1}$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\ln|4x+1|\Big]_0^n-\frac{1}{2}\Big[\ln|2x+1|\Big]_0^n$$

$$=\frac{1}{2}\ln(4n+1)-\frac{1}{2}\ln(2n+1)=\ln\sqrt{\frac{4n+1}{2n+1}}$$

ដូចនេះ $I_n = \ln\sqrt{\dfrac{4n+1}{2n+1}}$ និង $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\sqrt{\dfrac{4n+1}{2n+1}} = \ln\sqrt{2}$ ។

II-គេមានអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{\tan\frac{x}{2}}{\cos x}$ ដែល $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ។

ក/កំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ៖

គេមាន $f(x) = \dfrac{a}{\sin 2x} + \dfrac{b}{\sin x}$ គ្រប់ $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

គេបាន $\dfrac{a}{\sin 2x} + \dfrac{b}{\sin x} = \dfrac{\tan\frac{x}{2}}{\cos x}$

$$\frac{a + 2b\cos x}{2\sin x\cos x} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos x\cos\frac{x}{2}} = \frac{4\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin x\cos x} = \frac{2(1-\cos x)}{2\sin x\cos x}$$

គេទាញបាន $a + b\cos x = 2 - 2\cos x$ នាំឲ្យ $a = 2$, $b = -1$ ។

ដូចនេះ $a = 2$, $b = -1$ ។

ខ/ គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

គេមាន $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} f(\frac{x}{2^k})$ ដោយ $f(x) = \frac{2}{\sin 2x} - \frac{1}{\sin x}$

គេបាន $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (\frac{1}{2^{k-1}\sin\frac{x}{2^{k-1}}} - \frac{1}{2^k \sin\frac{x}{2^k}})$

$$= \frac{2}{\sin 2x} - \frac{1}{2^n \sin\frac{x}{2^n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(\frac{2}{\sin 2x} - \frac{1}{2^n \sin\frac{x}{2^n}}) = \frac{2}{\sin 2x} - \frac{1}{x}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{2x - \sin 2x}{x \sin 2x}$ ។

III-គេឲ្យសមីការ $(E): x^3 + px + q = 0$

ក/កំណត់ពីរចំនួនពិត p និង q

ដើម្បីឲ្យ $x = 1 + 2i$ ជាឫសនៃ (E) លុះត្រាតែវាផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

គេបាន $(1+2i)^3+p(1+2i)+q=0$

$$1+6i-12-8i+p+2ip+q=0$$
$$(-11+p+q)+i(2p-2)=0$$

គេទាញ $\begin{cases}2p-2=0\\-11+p+q=0\end{cases}$ នាំឲ្យ $p=1\ ,\ q=10$

ដូចនេះ $p=1\ ,\ q=10$ ។

ខ/ ដោះស្រាយសមីការ(E)

ចំពោះ$p=1\ ,\ q=10$ គេបាន $x^3+x+10=0$

គេអាចសរសេរ $x^3+2x^2-2x^2-4x+5x+10=0$

$$x^2(x+2)-2x(x+2)+5(x+2)=0$$
$$(x+2)(x^2-2x+5)=0$$

-បើ $x+2=0$ នោះ $x=-2$

-បើ $x^2-2x+5=0$, $\Delta'=1-5=-4=(2i)^2$

គេទាញឫស $x_1=1-2i$; $x_2=1+2i$ ។

សរុបមកសមីការមានឫសបី $x\in\{-2\ ,1-2i\ ,1+2i\ \}$ ។

IV-ក/កំណត់សមីការអាសុីមតូតទ្រេតនៃក្រាប(c_m)

គេមាន $f(x)=\dfrac{(2m+1)x^2-(m^2-1)x+4}{x}$

គេបាន $f(x)=(2m+1)x-m^2+1+\dfrac{4}{x}$ ដោយ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x}=0$

ដូចនេះបន្ទាត់ $(d): y=(2m+1)x-m^2+1$ ជាអាសុីមតូតទ្រេត

របស់ខ្សែកោង(c_m) តាង f ។

ខ/កំណត់សមីការប៉ារ៉ាបូលនឹង(P) ៖

តាង $(p): y=ax^2+bx+c$ ជាប៉ារ៉ាបូលនឹងដែលត្រូវរក ។

សមីការអាប់សុីសចំណុចប្រសព្វរវាង (P) និង (d) ៖

$$ax^2+bx+c=(2m+1)x-m^2+1$$
$$ax^2+(b-2m-1)x+m^2+c-1=0 \quad (1)$$

ដើម្បីឲ្យ (d) ប៉ះនឹង (P)ជានិច្ចគ្រប់mលុះត្រាតែសមីការ (1)

មានឫសឌុបជានិច្ចគ្រប់ m ពោលគឺគេត្រូវឲ្យ $\Delta=0$គ្រប់ m។

គេមាន $\Delta=(b-2m-1)^2-4a(m^2+c-1)$

$$\Delta = (b-1)^2 - 4m(b-1) + 4m^2 - 4am^2 - 4ac + 4a$$

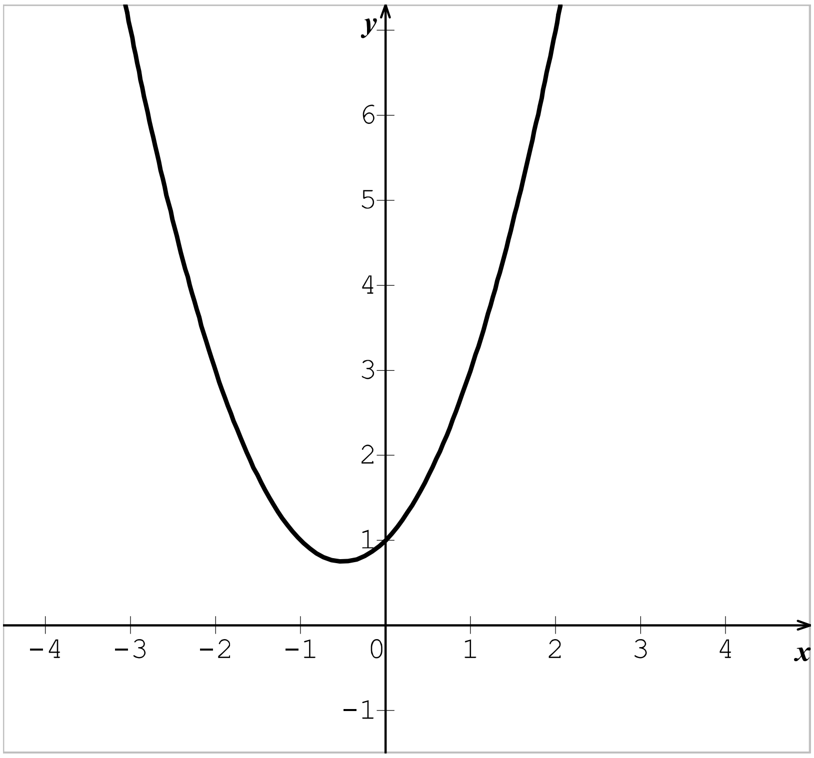
$$\Delta = (4-4a)m^2 - 4(b-1)m + [(b-1)^2 - 4ac + 4a]$$

ដើម្បីឲ្យ $\Delta = 0$ គ្រប់ m លុះត្រាតែ $\begin{cases} 4-4a=0 \\ b-1=0 \\ (b-1)^2 - 4ac + 4a = 0 \end{cases}$

គេទាញបាន $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$ ។

ដូចនេះ $(P): y = x^2 + x + 1$ ជាប៉ារ៉ាបូលដែលត្រូវរក ។

សង់ប៉ារ៉ាបូល $(P): y = x^2 + x + 1$



វិញ្ញាសាទី០៧

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_\alpha = \int_0^{\sqrt{\alpha}} x^3 e^{-x^2}.dx$ ដែល $\alpha > 0$ ។

គណនា I_α ជាអនុគមន៍នៃ α រួចគណនា $\lim_{\alpha \to +\infty} I_\alpha$ ។

II-គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (t_n) កំណត់ដោយ ៖

$t_0 = \frac{1}{7}$ និងទំនាក់ទំនងកំណើន $t_{n+1} = \frac{\sqrt[3]{t_n}}{\sqrt[3]{1+t_n} - \sqrt[3]{t_n}}$

ដែល $n = 0\ ,1\ ,2 ,...$ ។

ក/តាង $u_n = \ln(1 + \frac{1}{t_n})$ ។ ស្រាយថា (u_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ/គណនាតួ u_n និង t_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

III-រកតម្លៃ x ដើម្បីឲ្យ $y = \cos 2x - 4\cos^2 \frac{x}{2} + 1$ មានតម្លៃអប្បបរមា

រួចកំណត់តម្លៃអប្បបរមានោះ ។

IV-គេឲ្យប៉ារ៉ាបូល $(P): y = x^2 - 4x + 5$

ក/កំណត់កូអរដោនេនៃកំពូល និង កំណុំរបស់ (P) រួចសង់ (P)

ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j})$ ។

ខ/គេគូសបន្ទាត់ (d) មួយមានមេគុណប្រាប់ទិស m ចេញពី

ចំណុចនឹង I មួយ ។ បន្ទាត់(d)កាត់ (P) បានពីរចំណុច A និង B ។

កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចនឹង I ដើម្បីឲ្យបន្ទាត់ប៉ះ (P) ត្រង់

ចំណុច A និង B កែងនឹងគ្នាជានិច្ចគ្រប់តម្លៃ m ។

ដំណោះស្រាយ

I-គណនា I_α ជាអនុគមន៍នៃ α រួចគណនា $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} I_\alpha$

គេមាន $I_\alpha = \int_0^{\sqrt{\alpha}} x^3 e^{-x^2}.dx$ ដែល $\alpha > 0$

តាង $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = xe^{-x^2}dx \end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases} du = 2x.dx \\ v = -\dfrac{1}{2}e^{-x^2} \end{cases}$

គេបាន $I_\alpha = \left[-\frac{x^2}{2}e^{-x^2} \right]_0^{\sqrt{\alpha}} + \int_0^{\sqrt{\alpha}} xe^{-x^2}.dx$

$$= -\frac{\alpha}{2}e^{-\alpha} - \left[\frac{1}{2}e^{-x^2} \right]_0^{\sqrt{\alpha}}$$

$$= -\frac{1}{2}\alpha e^{-\alpha} - (\frac{1}{2}e^{-\alpha} - \frac{1}{2})$$

ដូចនេះ $I_\alpha = \frac{1}{2} - \frac{\alpha+1}{2}e^{-\alpha}$ និង $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} I_\alpha = \frac{1}{2}$ ។

II-ក/ស្រាយថា (u_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

សម្មតិកម្ម $t_0 = \frac{1}{7}$ និង $t_{n+1} = \frac{\sqrt[3]{t_n}}{\sqrt[3]{1+t_n} - \sqrt[3]{t_n}}$

គេមាន $u_n = \ln(1 + \frac{1}{t_n})$ នាំឲ្យ $u_{n+1} = \ln(1 + \frac{1}{t_{n+1}})$

ដោយ $t_{n+1} = \frac{\sqrt[3]{t_n}}{\sqrt[3]{1+t_n} - \sqrt[3]{t_n}}$ នោះគេបាន ៖

$$u_{n+1} = \ln(1 + \frac{\sqrt[3]{1+t_n} - \sqrt[3]{t_n}}{\sqrt[3]{t_n}}) = \ln(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{t_n}}) = \frac{1}{3}\ln(1 + \frac{1}{t_n})$$

គេបាន $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n$ នាំឲ្យ (u_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រមានរេសុង

$q=\frac{1}{3}$ និងតួ $u_0=\ln(1+\frac{1}{t_0})=\ln 8$ ។

ខ/គណនាតួ u_n និង t_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

តាមរូបមន្ត $u_n=u_0\times q^n=(\frac{1}{3})^n\ln 8$

ហើយ $u_n=\ln(1+\frac{1}{t_n})=\frac{1}{3^n}\ln 8$

គេទាញ $1+\frac{1}{t_n}=8^{\frac{1}{3^n}}$ នាំឲ្យ $t_n=\frac{1}{8^{\frac{1}{3^n}}-1}$ ។

ដូចនេះ $u_n=\frac{1}{3^n}\ln 8$ និង $t_n=\frac{1}{8^{\frac{1}{3^n}}-1}$ ។

III-រកតម្លៃ x

គេមាន $y=\cos 2x-4\cos^2\frac{x}{2}+1$

$$=2\cos^2 x-1-2(1+\cos x)+1$$

$$y = 2\cos^2 x - 2\cos x - 2$$

$$y = \frac{1}{2}(2\cos x - 1)^2 - \frac{3}{2}$$

ដើម្បីឲ្យ y មានតម្លៃតូចបំផុតលុះត្រាតែ $2\cos x - 1 = 0$

គេបាន $\cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$ នាំឲ្យ $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \; ; k \in Z$

ដូចនេះ $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \; ; k \in Z$ និង $y_{min} = -\frac{3}{2}$ ។

IV-គេឲ្យប៉ារ៉ាបូល $(P): y = x^2 - 4x + 5$

ក/កំណត់កូអរដោនេនៃកំពូល និង កំណុំរបស់ (P) ៖

គេមាន $y = x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$ ឬ $(x-2)^2 = y - 1$ ។

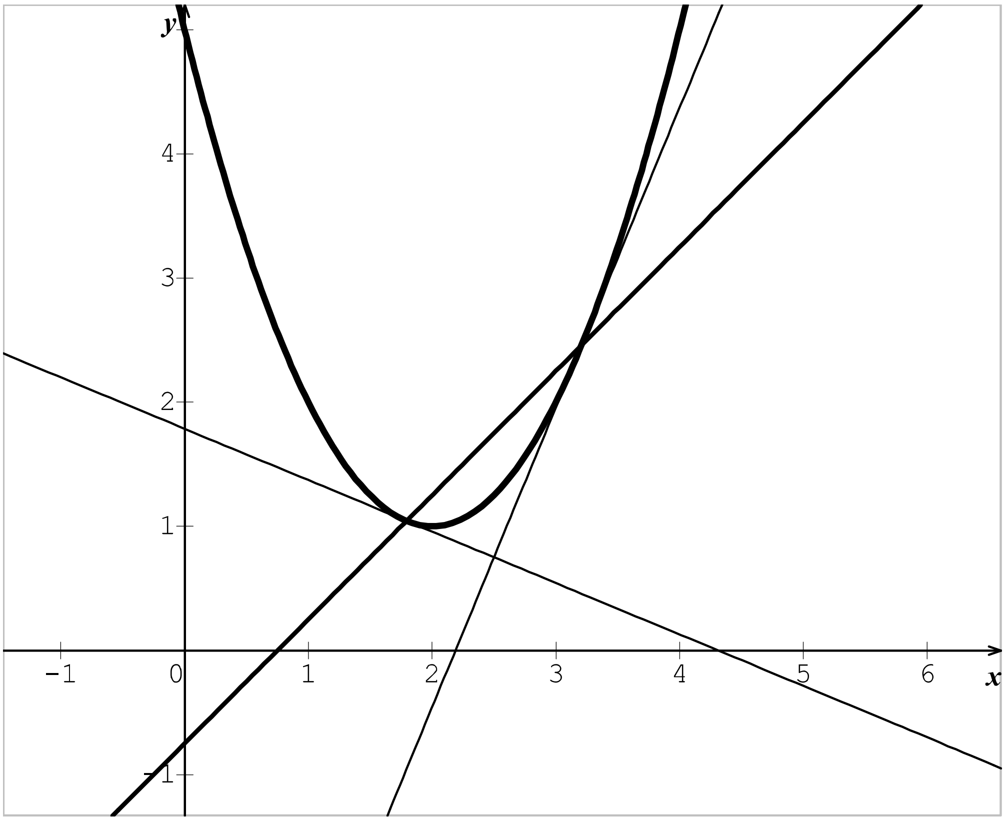
ដោយប្រៀបធៀបជាមួយសមីការ $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

គេទាញ $h = 2 \, , p = \frac{1}{4} \, , k = 1$ ។

ដូចនេះកូអរដោនេកំពូល $S(h,k) = S(2,1)$

និងកំណុំ $F(h,k+p) = F(2;\frac{5}{4})$ ។

ខ/កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចនឹង **I** ៖



តាង $\mathbf{I(\alpha,\beta)}$ ជាចំណុចនឹងដែលត្រូវរក ។

សមីការបន្ទាត់ $\mathbf{(d): y = m(x-\alpha)+\beta}$

សមីការអាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វរវាង **(d)** និង **(P)** ៖

$$\mathbf{x^2 - 4x + 5 = mx - m\alpha + \beta}$$

ឬ $\mathbf{x^2 - (m+4)x + m\alpha - \beta + 5 = 0 \quad (1)}$

មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ **(P)** ត្រង់ **A** និង **B** គឺ ៖

$y'_A = 2x_A - 4$ និង $y'_B = 2x_B - 4$ ។

ដើម្បីឲ្យបន្ទាត់ប៉ះ **(P)** ត្រង់ចំណុច **A** និង **B** កែងនឹងគ្នាជានិច្ច

គ្រប់តម្លៃ **m** លុះត្រាតែ $y'_A . y'_B = -1$ គ្រប់ **m** ។

គេបាន $(2x_A - 4)(2x_B - 4) = -1$

$$4x_A x_B - 8(x_A + x_B) + 17 = 0 \quad (1)$$

ដោយ x_A និង x_B ជាឬសនៃសមីការ (1) នោះតាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត

គេបាន $\begin{cases} x_A + x_B = m + 4 & (2) \\ x_A x_B = m\alpha - \beta + 5 & (3) \end{cases}$

យក (2) និង (3) ជួសក្នុង (1) គេបាន ៖

$$4(m\alpha - \beta + 5) - 8(m + 4) + 7 = 0$$
$$(4\alpha - 8)m = 4\beta + 5$$

សមីការនេះផ្ទៀងផ្ទាត់គ្រប់ **m** លុះត្រាតែ $\begin{cases} 4\alpha - 8 = 0 \\ 4\beta + 5 = 0 \end{cases}$

គេទាញ $\alpha = 2 \,;\, \beta = -\frac{5}{4}$ ។ ដូចនេះ $I(2\,,\,-\frac{5}{4})$ ។

វិញ្ញាសាទី០៨

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2}\tan\frac{\pi x}{2x+1}$

II-គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\frac{\sin^2 x}{\cos 3x}$ ដែល $0<x<\frac{\pi}{6}$

ក/ចូរស្រាយថា $f(x)=\frac{1}{4}(\frac{1}{\cos 3x}-\frac{1}{\cos x})$ គ្រប់ $0<x<\frac{\pi}{6}$ ។

ខ/គណនា $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n} f(\frac{x}{3^k})$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ។

III-គេមានអាំងតេក្រាល $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x^2+x+1}.dx$ ដែល $n=0,1,2,...$

ក/ស្រាយថា (I_n) ជាស្វីតចុះ រួចគណនា $I_n+I_{n+1}+I_{n+2}$ ។

ខ/គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}(nI_n)$ ។

IV-គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$(E): y''+y=(4x^2+8x+2)e^{2x}$ និង $(F): y''+y=0$

ក/កំណត់ចំនួនពិត a,b និង c ដើម្បីឲ្យ $y_1=(ax^2+bx+c)e^{2x}$

ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) ។

ខ/ស្រាយថា $y=y_1+y_2$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E)

លុះត្រាតែ y_2 ជាចម្លើយរបស់សមីការ (F) ។

គ/ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយរបស់ (E) ។

ដំណោះស្រាយ

I-គណនាលីមីត ៖

តាង $L=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2}\tan\frac{\pi x}{2x+1}$

គេមាន $\frac{\pi x}{2x+1}=a+\frac{b}{2x+1}=\frac{2ax+a+b}{2x+1}$

គេទាញ $\begin{cases}2a=\pi\\ a+b=0\end{cases}$ នាំឲ្យ $a=\frac{\pi}{2}$; $b=-\frac{\pi}{2}$

គេបាន $\dfrac{\pi x}{2x+1}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2(2x+1)}$ នោះ $\tan\dfrac{\pi x}{2x+1}=\cot\dfrac{\pi}{2(2x+1)}$

$L=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x^2}\cot\dfrac{\pi}{2(2x+1)}$ តាង $u=\dfrac{1}{2x+1}$ នោះ $x=\dfrac{1-u}{2u}$ ។

កាលណា $x\to\infty$ នោះ $u\to 0$ ។

គេបាន $L=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{4u^2}{(1-u)^2u}\cot\dfrac{\pi u}{2}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{4u\cos\dfrac{\pi u}{2}}{(1-u)^2\sin\dfrac{\pi u}{2}}$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{4\cos\dfrac{\pi u}{2}}{(1-u)^2}\times\frac{\dfrac{\pi u}{2}}{\sin\dfrac{\pi u}{2}}\times\frac{2}{\pi}=\frac{8}{\pi}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x^2}\tan\dfrac{\pi x}{2x+1}=\dfrac{8}{\pi}$ ។

II-ក/ ស្រាយថា $f(x)=\dfrac{1}{4}(\dfrac{1}{\cos 3x}-\dfrac{1}{\cos x})$ គ្រប់ $0<x<\dfrac{\pi}{6}$

គេមាន $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{\cos 3x}$ ដែល $0<x<\dfrac{\pi}{6}$

គេបាន $f(x)=\dfrac{1-\cos^2 x}{\cos 3x}=\dfrac{1}{4}.\dfrac{1-(4\cos^2 x-3)}{\cos 3x}$

ដោយ $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x = \cos x(4\cos^2 x - 3)$

គេបាន $f(x) = \frac{1}{4}(\frac{1}{\cos 3x} - \frac{4\cos^2 x - 3}{\cos 3x}) = \frac{1}{4}(\frac{1}{\cos 3x} - \frac{1}{\cos x})$

ដូចនេះ $f(x) = \frac{1}{4}(\frac{1}{\cos 3x} - \frac{1}{\cos x})$ គ្រប់ $0 < x < \frac{\pi}{6}$ ។

ខ/គណនា $S_n = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{x}{3^k})$ និង $\lim_{n\to+\infty} S_n$

គេបាន $S_n = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}(\frac{1}{\cos\frac{x}{3^{k-1}}} - \frac{1}{\cos\frac{x}{3^k}}) = \frac{1}{4}(\frac{1}{\cos 3x} - \frac{1}{\cos\frac{x}{3^n}})$

ហើយ $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{4}(\frac{1}{\cos 3x} - 1) = \frac{\sin^2\frac{3x}{2}}{2\cos 3x}$ ។

III-ក/ស្រាយថា (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ

គេមាន $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + x + 1}.dx$ និង $I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x^2 + x + 1}.dx$

ចំពោះគ្រប់ $x \in [0,1]$ និង $n \in IN$ គេមាន $x^n \geq x^{n+1}$

នាំឲ្យ $\frac{x^n}{x^2 + x + 1} \geq \frac{x^{n+1}}{x^2 + x + 1}$ នោះ $I_n \geq I_{n+1}$ ។

ដូចនេះ (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ។

គណនា $I_n + I_{n+1} + I_{n+2}$ ៖

គេបាន $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1} + x^{n+2}}{x^2 + x + 1}.dx$

$$= \int_0^1 \frac{x^n(1 + x + x^2)}{x^2 + x + 1}.dx$$

$$= \int_0^1 x^n.dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

ដូចនេះ $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ ។

ខ/គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}(nI_n)$ ៖

គេមាន $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ (1)

គេបាន $I_{n-2} + I_{n-1} + I_n = \frac{1}{n-1}$ (2) គ្រប់ $n \geq 2$ ។

ដោយ (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះនោះចំពោះគ្រប់ $n \geq 2$ គេមាន

$I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n \leq I_{n-1} \leq I_{n-2}$

នាំឲ្យ $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} \le 3I_n \le I_{n-2} + I_{n-1} + I_n$ (3)

តាម (1) , (2) និង (3) គេទាញបាន ៖

$\frac{1}{n+1} \le 3I_n \le \frac{1}{n-1}$ នាំឲ្យ $\frac{n}{3(n+1)} \le n\,I_n \le \frac{n}{3(n-1)}$

ដោយ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{3(n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{3(n-1)} = \frac{1}{3}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to\infty} (nI_n) = \frac{1}{3}$ ។

IV-គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$(E): y'' + y = (4x^2 + 8x + 2)e^{2x}$ និង $(F): y'' + y = 0$

ក/កំណត់ចំនួនពិត a, b និង c ដើម្បីឲ្យ $y_1 = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$

ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ **(E)** ។

ខ/ស្រាយថា $y = y_1 + y_2$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ **(E)**

លុះត្រាតែ y_2 ជាចម្លើយរបស់សមីការ **(F)** ។

គ/ដោះស្រាយសមីការ **(F)** រួចទាញរកចម្លើយរបស់ **(E)** ។

វិញ្ញាសាទី០៩

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) និង (v_n) កំណត់ដោយ៖

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ v_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{និង} \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n - v_n}{\sqrt{2}} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \text{ដែល } n \geq 1$$

ក. គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច $z_n = u_n + i.v_n$ ។

ចូរស្រាយថា (z_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច រួចគណនា z_n ជាអនុគមន៍នៃ n ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ខ. សំដែង u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

II-គណនាផលបូក $S = \sum\limits_{i=0}^{101} \dfrac{{x_i}^3}{1 - 3x_i + 3{x_i}^2}$

ដែល $x_i = \dfrac{i}{101}$; $i = 1 , 2 , 3 ,...$ ។

III-គេឲ្យ $a \geq 1$ និង $b \geq 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b} \leq 2\sqrt{\log_2(\frac{a+b}{2})}$

IV-គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 3x + 1}{3x^2 - 3x + 1}$ កំនត់ចំពោះគ្រប់ $x \in IR$ ។

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a និង b ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$f\left(\frac{1+a+b}{2}\right) \geq f\left(\frac{1+a+b+ab}{2+a+b}\right)$ ។

V-គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់ និង មានដេរីវេលើ IR ដែលចំពោះគ្រប់

$x, y \in IR$ គេមានទំនាក់ទំនង $f(\frac{x+y}{2}) = \sqrt{f(x)f(y)}$ និង $f(x) > 0$ ។

ចូរកំណត់អនុគមន៍ $y = f(x)$.

ដំណោះស្រាយ

I-ក. ស្រាយថា (z_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច៖

គេមាន $z_n = u_n + i.v_n$

គេបាន $z_{n+1} = u_{n+1} + i.v_{n+1}$

$$= \frac{u_n - v_n}{\sqrt{2}} + i.\frac{u_n + v_n}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}(u_n + iv_n) = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{1} z_n$$

ដូចនេះ(z_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច ។

គណនា z_n ជាអនុគមន៍នៃ n៖

គេបាន $z_n = z_1 \times q^{n-1}$

តែ $z_1 = u_1 + iv_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}$

និង $q = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}$

គេបាន $z_n = (\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})^n$

ដូចនេះ $z_n = \cos\frac{n\pi}{4} + i.\sin\frac{n\pi}{4}$ (រូបមន្តដឺម័រ)

ខ. សំដែង u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n

គេមាន $z_n = u_n + i.v_n$

ដោយ $z_n = \cos\frac{n\pi}{4} + i.\sin\frac{n\pi}{4}$

ដូចនេះ $u_n = \cos\frac{n\pi}{4}$ និង $v_n = \sin\frac{n\pi}{4}$ ។

II-គណនាផលបូក $S = \sum_{i=0}^{101} \frac{x_i^{\ 3}}{1 - 3x_i + 3x_i^{\ 2}}$

យើងមាន $1 - 3x + 3x^2 = x^3 + (1-x)^3 = x^3 - (x-1)^3$

តាង $f(x) = \frac{x^3}{1 - 3x + 3x^2} = \frac{x^3}{x^3 + (1-x)^3}$

គេបាន $f(x_i) = \frac{x_i^{\ 3}}{x_i^{\ 3} + (1-x_i)^3}$

ហើយ $f(1-x_i) = \frac{(1-x_i)^3}{(1-x_i)^3 + x_i^{\ 3}}$

គេបាន $f(x_i) + f(1-x_i) = \frac{x_i^{\ 3}}{x_i^{\ 3} + (1-x_i)^3} + \frac{(1-x_i)^3}{(1-x_i)^3 + x_i^{\ 3}} = 1$

គេទាញ $f(x_i) = 1 - f(1-x_i)$

ដោយ $x_i = \frac{i}{101}$ នោះ $1 - x_i = 1 - \frac{i}{101} = \frac{101-i}{101}$

គេបាន $S=\sum_{i=0}^{101}f(x_i)=\sum_{i=0}^{101}f\left(\frac{i}{101}\right)=\sum_{i=0}^{101}\left[1-f(\frac{101-i}{101})\right]$

$$S=102-\sum_{i=0}^{101}f\left(\frac{101-i}{101}\right)=102-S$$

គេទាញ $S=\frac{102}{2}=51$ (ព្រោះ៖ $\sum_{i=0}^{101}f\left(\frac{i}{101}\right)=\sum_{i=0}^{101}f\left(\frac{101-i}{101}\right)$)

III-បង្ហាញថា $\sqrt{\log_2 a}+\sqrt{\log_2 b}\le 2\sqrt{\log_2(\frac{a+b}{2})}$

យើងមាន $a+b\ge 2\sqrt{a.b}$ (វិសមភាព $AM-GM$)

ឬ $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{a.b}$

នាំឲ្យ $\log_2(\frac{a+b}{2})\ge\frac{1}{2}(\log_2 a+\log_2 b)$

ឬ $\log_2 a+\log_2 b\le 2\log_2(\frac{a+b}{2})$ (1)

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន ៖

$$\log_2 a+\log_2 b\ge 2\sqrt{\log_2 a}.\sqrt{\log_2 b}$$

$$2(\log_2 a+\log_2 b)\ge \log_2 a+2\sqrt{\log_2 a}.\sqrt{\log_2 b}+\log_2 b$$

$$2(\log_2 a+\log_2 b)\ge (\sqrt{\log_2 a}+\sqrt{\log_2 b})^2$$

$$\log_2 a+\log_2 b\ge \frac{1}{2}(\sqrt{\log_2 a}+\sqrt{\log_2 b})^2 \quad (2)$$

តាមទំនាក់ទំនង (1) និង (2) យើងទាញ៖

$$\frac{1}{2}(\sqrt{\log_2 a}+\sqrt{\log_2 b})^2\le 2\log_2(\frac{a+b}{2})$$

$$(\sqrt{\log_2 a}+\sqrt{\log_2 b})^2\le 4\log_2(\frac{a+b}{2})$$

$$\sqrt{\log_2 a}+\sqrt{\log_2 b}\le 2\sqrt{\log_2(\frac{a+b}{2})}$$

ដូចនេះ $\boxed{\sqrt{\log_2 a}+\sqrt{\log_2 b}\le 2\sqrt{\log_2(\frac{a+b}{2})}}$ ។

IV-ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f\left(\frac{1+a+b}{2}\right)\ge f\left(\frac{1+a+b+ab}{2+a+b}\right)$

យើងមាន $f(x)=\frac{x^3+3x^2-3x+1}{3x^2-3x+1}$ កំនត់ចំពោះគ្រប់ $x\in IR$

$$f'(x)=\frac{(3x^2+6x-3)(3x^2-3x+1)-(6x-3)(x^3+3x^2-3x+1)}{(3x^2-3x+1)^2}$$

$$=\frac{3x^4-6x^3+3x^2}{(3x^2-3x+1)^2}=\frac{3x^2(x-1)^2}{(3x^2-3x+1)^2}\ge 0\ ,\ \forall x\in IR$$

ដូចនេះ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនលើ IR ។

ម៉្យាងទៀតយើងសន្មតថា $\frac{1+a+b}{2} \geq \frac{1+a+b+ab}{2+a+b}$

គេបាន $\frac{2}{1+a+b} \leq \frac{2+a+b}{1+a+b+ab}$

$$\frac{2}{1+a+b} \leq \frac{(1+a)+(1+b)}{(1+a)(1+b)}$$

$$\frac{2}{1+a+b} \leq \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b}$$

ដោយ $\frac{1}{1+a+b} \leq \frac{1}{1+a}$ និង $\frac{1}{1+a+b} \leq \frac{1}{1+b}$

គ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a និង b។

គេទាញ $\frac{2}{1+a+b} \leq \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b}$

នាំឲ្យការសន្មត $\frac{1+a+b}{2} \geq \frac{1+a+b+ab}{2+a+b}$ ពិត។

ដូចនេះតាមលក្ខណៈអនុគមន៍កើនគេទាញបាន ៖

$f\left(\frac{1+a+b}{2}\right) \geq f\left(\frac{1+a+b+ab}{2+a+b}\right)$ ។

V-កំណត់អនុគមន៍ $y = f(x)$

គេមានទំនាក់ទំនង $f(\frac{x+y}{2}) = \sqrt{f(x)f(y)}$

ដោយ $f(x) > 0$ នោះ $f(y) > 0$ និង $f(\frac{x+y}{2}) > 0$

តាងអនុគមន៍ $g(x) = \ln f(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x \in IR$

គេបាន $g(\frac{x+y}{2}) = \ln\left[f(\frac{x+y}{2})\right]$ ដោយ $f(\frac{x+y}{2}) = \sqrt{f(x)f(y)}$

ហេតុនេះ $g(\frac{x+y}{2}) = \ln\left[\sqrt{f(x)f(y)}\right] = \frac{1}{2}\left[\ln f(x) + \ln f(y)\right]$

ឬ $g(\frac{x+y}{2}) = \frac{1}{2}\left[g(x) + g(y)\right]$

ធ្វើដេរីវេធៀបនឹង x ក្នុងសមភាព $g(\frac{x+y}{2}) = \frac{1}{2}\left[g(x) + g(y)\right]$

ដោយចាត់ទុក y ជាអថេរមិនអាស្រ័យនឹង x គេបាន ៈ

$\frac{1}{2}g'(\frac{x+y}{2}) = \frac{1}{2}g'(x)$ ឬ $g'(\frac{x+y}{2}) = g'(x)$

យក $x = 0$ គេបាន $g'(\frac{y}{2}) = g'(0)$

ធ្វើអាំងតេក្រាល $\int g'(\frac{y}{2})dy = \int g'(o)dy = g'(0)y + k$

តាង $z = \frac{y}{2}$ នោះ $dy = 2dz$

គេបាន $2\int g'(z)dz = g'(0)y + k$

$$2g(z) = g'(0)y + k \text{ ឬ } g(z) = \frac{1}{2}g'(0)y + \frac{k}{2} = g'(0)z + \frac{k}{2}$$

យក $a = g'(0)$ និង $b = \frac{k}{2}$ គេបាន $g(z) = az + b$

ឬ $g(x) = ax + b$ ដោយ $g(x) = \ln f(x)$

គេបាន $\ln f(x) = ax + b$ នាំឱ្យ $f(x) = e^{ax+b}$

ដូចនេះ $f(x) = e^{ax+b}$ ដែល $a, b \in IR$ ។

វិញ្ញាសាទី១០

សម្រាប់រយះពេល២ម៉ោង

I-គេកំណត់ចំនួន $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ ដូចខាងក្រោម៖

$$a_0 = \frac{1}{2}; a_{k+1} = a_k + \frac{{a_k}^2}{n} \quad (n > 1, k = 0, 1, 2, ..., n-1)$$

ចូរបង្ហាញថា $1 - \frac{1}{n} < a_n < 1$ ។

II-គណនាផលគុណខាងក្រោម៖

$$P_n = \prod_{k=0}^{n} \left(\tan^{2^k} \frac{x}{2^k} \right) = \tan x . \tan^2 \frac{x}{2} . \tan^4 \frac{x}{4} ..... \tan^{2^n} \frac{x}{2^n}$$

III-ដោះស្រាយសមីការ

$$\log_3(2^x + 1) + \frac{6}{\log_3(2^x+1)} = 1 + 2\sqrt{\log_3(2^x+1) + \frac{8}{\log_3^2(2^x+1)}}$$

IV-គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍កំណត់លើចន្លោះ $[0,1]$ ដោយដឹងថា៖

$f(0) = f(1) = 1$ និង $|f(a) - f(b)| < |a - b|$ ចំពោះគ្រប់ $a \neq b$

ក្នុងចន្លោះ $[0,1]$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-បង្ហាញថា $1-\frac{1}{n} < a_n < 1$

គេមាន $a_{k+1} = a_k + \frac{{a_k}^2}{n} = \frac{a_k(n+a_k)}{n}$

គេបាន $\frac{1}{a_{k+1}} = \frac{n}{a_k(a_k+n)} = \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_k+n}$

ឬ $\frac{1}{a_k+n} = \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}$

ហេតុនេះ $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a_k+n} = \sum_{k=0}^{n-1}(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}) = \frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n} = 2 - \frac{1}{a_n}$ (*)

គេមាន $a_0 = \frac{1}{2} > 0$ ពិត ។ ឧបមាថា $a_k > 0$ ពិត

តាម $a_{k+1} = a_k + \frac{{a_k}^2}{n}$ គេទាញបាន $a_{k+1} > 0$ ពិត

ដូចនេះ $a_k > 0$ នោះ $a_k + n > n$ ឬ $\frac{1}{a_k+n} < \frac{1}{n}$ $,\forall n > 1$

គេបាន $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{a_k+n}<\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}=\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+...+\frac{1}{n}}_{(n)}=\frac{n}{n}=1$

តាម (*) គេទាញបាន $2-\frac{1}{a_n}<1$ នាំឱ្យ $a_n<1$ (i)

ម៉្យាងទៀតដោយ $a_n<1$ នោះ $a_k<1$ ឬ $a_k+n<n+1$

ឬ $\frac{1}{a_k+n}>\frac{1}{n+1}$ គ្រប់ $k=0,1,2,....,n-1$ ។

គេបាន $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{a_k+n}>\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$

ដោយពិនិត្យឃើញថាគ្រប់ $n>1$ គេមាន $\frac{n}{n+1}-\frac{n-2}{n-1}=\frac{2}{n^2-1}>0$

នោះគេទាញបាន $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{a_k+n}>\frac{n}{n+1}>\frac{n-2}{n-1}$

តាម (*) គេទាញបាន $2-\frac{1}{a_n}>\frac{n-2}{n-1}$

ឬ $\frac{1}{a_n}<2-\frac{n-2}{n-1}=\frac{n}{n-1}$ នោះ $a_n>\frac{n-1}{n}=1-\frac{1}{n}$ (ii)

តាម (i) & (ii) គេទាញបាន $1-\frac{1}{n}<a_n<1$ ។

ដូចនេះ $1-\frac{1}{n}<a_n<1$ ។

II-គណនាផលគុណ $P_n=\prod_{k=0}^{n}\left(\tan^{2^k}\frac{x}{2^k}\right)$

គេមាន $\tan a=\frac{\sin a}{\cos a}=\frac{2\sin^2 a}{2\sin a\cos a}=\frac{2\sin^2 a}{\sin 2a}$

យក $a=\frac{x}{2^k}$ គេបាន $\tan\frac{x}{2^k}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2^k}}{\sin\frac{2x}{2^k}}$

គេទាញ $P_n=\prod_{k=0}^{n}\left(2^{2^k}.\frac{\sin^{2^{k+1}}\frac{x}{2^k}}{\sin^{2^k}\frac{2x}{2^k}}\right)=2^{2^{n+1}-1}.\frac{\sin^{2^{n+1}}\frac{x}{2^n}}{\sin 2x}$

ដូចនេះ $P_n=2^{(2^{n+1}-1)}.\frac{\sin^{2^{n+1}}\frac{x}{2^n}}{\sin 2x}$ ។

III-ដោះស្រាយសមីការ

$$\log_3(2^x+1)+\frac{6}{\log_3(2^x+1)}=1+2\sqrt{\log_3(2^x+1)+\frac{8}{\log_3^2(2^x+1)}}$$

តាង $t=\log_3(2^x+1)$ សមីការអាចសរសេរ ៖

$$t+\frac{6}{t}=1+2\sqrt{t+\frac{8}{t^2}}$$ ឬ $$\frac{t^2-t+6}{t}=2\sqrt{\frac{(t+2)(t^2-2t+4)}{t^2}}$$

ឬ $$\frac{t^2-t+6}{t}=2\sqrt{\frac{t+2}{t}.\frac{t^2-2t+4}{t}} \quad (1)$$

តាង $u=\frac{t+2}{t}$ និង $v=\frac{t^2-2t+4}{t}$ គេបាន $u+v=\frac{t^2-t+6}{t}$

សមីការ អាចសរសេរ (1)$u+v=2\sqrt{uv}\Leftrightarrow(\sqrt{u}-\sqrt{v})^2=0$

គេទាញ $u=v$ ឬ $\frac{t+2}{t}=\frac{t^2-2t+4}{t}$) $t\neq 0$)

ឬ $t+2=t^2-2t+4$

ឬ $t^2-3t+2=0$ មានឬស $t_1=1\,;\,t_2=2$ ។

ចំពោះ-$t=1\Rightarrow\log_3(2^x+1)=1$

$\Rightarrow 2^x + 1 = 3$

$\Rightarrow \quad 2^x = 2$

$\Rightarrow \quad x = 1$

ចំពោះ-$t = 2 \Rightarrow \log_3(2^x + 1) = 2$

$\Rightarrow 2^x + 1 = 9$

$\Rightarrow \quad 2^x = 8$

$\Rightarrow \quad x = 3$

ដូចនេះសមីការមានឫស $x_1 = 1 , x_2 = 3$ ។

បង្ហាញថា $|f(a) - f(b)| < \frac{1}{2}$

-ករណីទី១៖

ចំពោះ $|a - b| \le \frac{1}{2}$ នោះគេបាន $|f(a) - f(b)| < |a - b| \le \frac{1}{2}$ ពិត

-ករណីទី២ ៖

ចំពោះ $|a - b| > \frac{1}{2}$ នោះតាមលក្ខណៈឆ្លុះគេអាចសន្មតថា $a > b$

គេមាន $|f(a) - f(b)| = |f(a) - f(1) + f(0) - f(b)|$

តាមវិសមភាពត្រីកោណគេបាន៖

$$|f(a)-f(b)|\le|f(a)-f(1)|+|f(0)-f(b)|$$

$$|f(a)-f(b)|<|a-1|+|0-b|=1-a+b=1-(a-b)<\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $|f(a)-f(b)|<\frac{1}{2}$ ។

វិញ្ញាសាទី១១

សម្រាប់រយះពេល២ម៉ោង

I-ដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការ ៖

$$\begin{cases} xy + x + y = 11 \\ x^2y^2 + x^2 + y^2 = 49 \end{cases}$$ ដែល $x \in IR$, $y \in IR$ ។

II-ស៊ីតនៃចំនួនពិត $(a_n)_{n\geq 1}$ កំណត់ដោយ $a_1 = 1$, $a_2 = 3$

និង $a_{n+2} = (n+3)a_{n+1} - (n+2)a_n$, $\forall n \in IN$

ចូរកំណត់គ្រប់តម្លៃ n ដើម្បីឱ្យ a_n ចែកដាច់នឹង 11 ។

III-ក. ចូរគណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\sin\frac{\pi}{10}$ និង $\cos\frac{\pi}{10}$

ខ. ចូរស្រាយថា $x^2 + (x-y)^2 \leq 4(x^2+y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$

គ្រប់ចំនួន $x, y \in IR$ ។

IV-គេមានអនុគមន៍ $\mathbf{f(x)=ln(1+2e^{x})}$ ដែល $\mathbf{x}$ ជាចំនួនពិត ។

គេពិនិត្យស្វ៊ីតពីរ $\mathbf{(a_n)}$ និង $\mathbf{(b_n)}$ កំណត់ ដោយទំនាក់ទំនង

$\mathbf{a_0=f(0)}$, $\mathbf{a_{n+1}=f(a_n)}$ និង $\mathbf{b_n=1+e^{a_n}}$ គ្រប់ $\mathbf{n=0,1,2,...}$

ក/ចូរស្រាយថា $\mathbf{(b_n)}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ/គណនា $\mathbf{b_n}$ និង $\mathbf{a_n}$ ជាអនុគមន៍នៃ $\mathbf{n}$ ។

V-គេឱ្យ $\mathbf{x,y,z}$ ជាចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់ $\mathbf{x^2y^2+2yx^2+1=0}$ ។

ចូរកំណត់តម្លៃតូចបំផុត និង ធំបំផុតនៃអនុគមន៍ ៖

$$\mathbf{f(x,y)=\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}+y(y+\frac{1}{x}+2)}$$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ ៖

របៀបទី១

$$\begin{cases} xy + x + y = 11 & (1) \\ x^2y^2 + x^2 + y^2 = 49 & (2) \end{cases}$$

តាង $s = x + y$ និង $p = xy$

សមីការ (1) ក្លាយជា $p + s = 11$ ឬ $s = 11 - p$ (3)

សមីការ (2) អាចសរសេរ $x^2y^2 + (x + y)^2 - 2xy = 49$

ឬ $p^2 + s^2 - 2p = 49$ (4)

យកសមីការ (3) ជំនួសក្នុង (4) គេបាន ៖

$$p^2 + (11 - p)^2 - 2p = 49$$

$$p^2 + 121 - 22p + p^2 - 2p = 49$$

$$2p^2 - 24p + 72 = 0$$

$$2(p - 6)^2 = 0$$

គេទាញឫស $p=6$ ហើយតាម (3) គេបាន $s=11-6=5$

គេបាន $s=5$, $p=6$ នោះ x និង y ជាឫសសមីការ ៖

$X^2-5X+6=0$ នាំឲ្យ $X_1=2$, $X_2=3$

ដូចនេះ $x=2, y=3$ ឬ $x=3$, $y=2$ ។

របៀបទី២

$$\begin{cases} xy+x+y=11 & (1) \\ x^2y^2+x^2+y^2=49 & (2) \end{cases}$$

គុណអង្គទាំងពីរនៃសមីការ (1) នឹង 10 គេបាន ៖

$$\begin{cases} 10xy+10x+10y=110 & (1) \\ x^2y^2+x^2+y^2=49 & (2) \end{cases}$$

ធ្វើផលដកសមីការ (2) និង (1) អង្គនឹងអង្គគេបាន ៖

$$x^2y^2+x^2+y^2-10xy-10x-10y=-61$$
$$(x^2y^2-12xy+36)+(x^2+y^2+25+2xy-10x-10y)=0$$
$$(xy-6)^2+(x+y-5)^2=0$$

គេទាញ $\begin{cases} (x+y-5)^2 = 0 \\ (xy-6)^2 = 0 \end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$

នោះ x និង y ជាឫសសមីការ $X^2 - 5X + 6 = 0$

នាំឲ្យ $X_1 = 2 , X_2 = 3$ ។

ដូចនេះ $x = 2, y = 3$ ឬ $x = 3 , y = 2$ ។

II-កំណត់គ្រប់តម្លៃ n ដើម្បីឱ្យ a_n ចែកដាច់នឹង 11

គេមាន $a_{n+2} = (n+3)a_{n+1} - (n+2)a_n \ ,\forall n \in IN$

ឬ $a_{n+2} - a_{n+1} = (n+2)(a_{n+1} - a_n)$

ឬ $\frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n} = n+2$

គេបាន $\prod_{k=1}^{(n-2)} \left(\frac{a_{k+2} - a_{k+1}}{a_{k+1} - a_k} \right) = \prod_{k=1}^{(n-2)} (k+2)$

$$\frac{a_n - a_{n-1}}{a_2 - a_1} = 3.4.5......n$$ ដោយ $a_2 - a_1 = 2$

គេទាញបាន $a_n - a_{n-1} = n!$

ហើយ $\sum_{k=2}^{n}(a_k - a_{k-1}) = \sum_{k=2}^{n}(k!)$

$$a_n - a_1 = 2!+3!+....+n!$$ ដោយ $a_1 = 1 = 1!$

គេបាន $a_n = 1!+2!+3!+.....+n!$ ។

-ករណីទី១ ៖ ចំពោះ $n < 11$ គេមាន

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_2 &= 3 \\
a_3 &= 1!+2!+3! = 9 \\
a_4 &= 1!+2!+3!+4! = 33 = 3\times 11 \\
a_5 &= a_4 + 5! = 153 \\
a_6 &= a_5 + 6! = 873 \\
a_7 &= a_6 + 7! = 5913 \\
a_8 &= a_7 + 8! = 46233 = 4203\times 11 \\
a_9 &= a_8 + 9! = 409113 \\
a_{10} &= a_9 + 10! = 4037913
\end{aligned}$$

គេបាន $n = 4$, $n = 8$ ។

-ករណីទី២ ចំពោះ $n \geq 11$

គេបាន $a_n = a_{10} + \sum_{k=11}^{n}(k!)$

ដោយ $\sum_{k=11}^{n}(k!)$ ចែកដាច់នឹង 11 ហើយ a_{10} ចែកមិនដាច់នឹង 11

នោះចំពោះ $n \geq 11$ គេបាន a_n ចែកមិនដាច់នឹង 11 ។

ដូចនេះតម្លៃ n ដែលធ្វើឱ្យ a_n ចែកដាច់នឹង 11 មានតែពីរគត់គឺ ៗ

$n = 4$ ឬ $n = 8$ ។

III-ក. គណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\sin\frac{\pi}{10}$ និង $\cos\frac{\pi}{10}$

គេមាន $\frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{10}$

គេបាន $\sin\frac{2\pi}{10} = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{10}) = \cos\frac{3\pi}{10}$

តាមរូបមន្តត្រីកោណមាត្រ ៖

$\sin 2a = 2\sin a\cos a$ និង $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$

$$2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}=\cos\frac{3\pi}{10}$$

$$2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}=3\cos\frac{\pi}{10}-4\cos^3\frac{\pi}{10}$$

$$2\sin\frac{\pi}{10}=3-4\cos^2\frac{\pi}{10}$$

$$2\sin\frac{\pi}{10}=3-4(1-\sin^2\frac{\pi}{10})$$

ឬ $4\sin^2\frac{\pi}{10}-2\sin\frac{\pi}{10}-1=0$ តាង $t=\sin\frac{\pi}{10}>0$

គេបាន $4t^2-2t-1=0$, $\Delta'=1+4=5>0$

គេទាញឫស $t_1=\frac{1-\sqrt{5}}{4}<0$ (មិនយក) , $t_2=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

ដូចនេះ $\sin\frac{\pi}{10}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ ។

ដោយ $\sin^2\frac{\pi}{10}+\cos^2\frac{\pi}{10}=1$

នាំឲ្យ $\cos\frac{\pi}{10}=\sqrt{1-(\frac{1+\sqrt{5}}{4})^2}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

ដូចនេះ $\cos\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ ។

ខ. ស្រាយថា $x^2+(x-y)^2\le 4(x^2+y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$

តាងអនុគមន៍ $f(x;y)=x^2+(x-y)^2-4(x^2+y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$

គេបាន ៖

$$f(x;y)=x^2+x^2-2xy+y^2-4(x^2+y^2)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2$$

$$=2x^2-2xy+y^2-4(x^2+y^2)\frac{6+2\sqrt{5}}{16}$$

$$=2x^2-2xy+y^2-(x^2+y^2)\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$=\frac{1-\sqrt{5}}{2}x^2-2xy-\frac{1+\sqrt{5}}{2}y^2$$

$$=-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}x^2+2xy+\frac{\sqrt{5}+1}{2}y^2\right)$$

$$=-\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\,x+\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\,y\right)^2\le 0\quad,\forall x,y\in IR$$

ដូចនេះ $x^2+(x-y)^2\le 4(x^2+y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$ ។

IV-ក/ស្រាយថា (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ៖

គេមាន $a_0 = f(0) = \ln 3$ និង $a_{n+1} = \ln(1+2e^{a_n})$

ហើយ $b_n = 1 + e^{a_n}$ នោះ $b_{n+1} = 1 + e^{a_{n+1}}$

$$b_{n+1} = 1 + e^{\ln(1+2e^{a_n})} = 1 + 1 + 2e^{a_n}$$

$$b_{n+1} = 2(1 + e^{a_n}) = 2b_n$$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង 2 ។

ខ/គណនា b_n និង a_n ជាអនុគមន៍នៃ n

ដោយ (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = 2$ និងតួទីមួយ

$b_0 = 1 + e^{a_0} = 1 + e^{\ln 3} = 4$ នោះគេបាន ៖

$b_n = b_0 \times q^n = 4 \times 2^n = 2^{n+2}$ ហើយតាម $b_n = 1 + e^{a_n}$

គេទាញ $a_n = \ln(b_n - 1) = \ln(2^{n+2} - 1)$ ។

ដូចនេះ $b_n = 2^{n+2}$, $a_n = \ln(2^{n+2} - 1)$ ។

V-កំណាត់តម្លៃតូចបំផុត និង ធំបំផុត ៖

គេមាន $x^2y^2+2yx^2+1=0$

គេបាន $y^2+2y+\frac{1}{x^2}=0$ ឬ $(y+1)^2+\frac{1}{x^2}=1$ ដែល $x\neq 0$

តាង $y+1=\cos\varphi$ និង $\frac{1}{x}=\sin\varphi$

នោះ $(y+1)^2+\frac{1}{x^2}=1$ ពិតគ្រប់ φ

គេមាន $f(x,y)=\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}+y(y+\frac{1}{x}+2)$

$$=2\sin^2\varphi+\sin\varphi+(\cos\varphi-1)(\cos\varphi-1+\sin\varphi+2)$$
$$=2\sin^2\varphi+\sin\varphi+\cos^2\varphi-1+\sin\varphi\cos\varphi-\sin\varphi$$
$$=\sin^2\varphi+\sin\varphi\cos\varphi=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\frac{\pi}{4}+2\varphi)$$

ដូចនេះ $\min f(x,y)=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ និង $\max=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ ។

វិញ្ញាសាទី១២

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-ចូរដោះស្រាយសមីការ $\log_{12}(\sqrt[4]{x}+\sqrt{x})=\frac{1}{2}\log_9 x$

II-គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$, $x\in IR$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(\frac{a+b}{1+a+b})<f(\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b})$

ចំពោះគ្រប់ $a>0,b>0$ ។

III-គេឲ្យ m និង n ជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{(2m)!\,(2n)!}{m!n!(m+n)!}$ ជាចំនួនគត់ ។

IV-គេឱ្យ $a\,;b\,;c\,;d$ និង x ជាចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖

$\frac{\sin x}{a}=\frac{\sin 2x}{b}=\frac{\sin 3x}{c}=\frac{\sin 4x}{d}$ ដែល $x\neq k\pi\ ;\ k\in Z$

ចូរបង្ហាញថា $a^3(4b^2-d^2)=b^4(3a-c)$

ដំណោះស្រាយ

I-ចូរដោះស្រាយសមីការ ៖

$$\log_{12}(\sqrt[4]{x}+\sqrt{x})=\frac{1}{2}\log_9 x \quad (1)$$

សមីការមានន័យលុះត្រាតែ $\begin{cases} x>0 \\ \sqrt[4]{x}+\sqrt{x}>0 \end{cases}$ នាំឲ្យ $x>0$

តាង $t=\frac{1}{2}\log_9 x$ នោះ $x=9^{2t}$ **(2)**

តាម **(1)** គេបាន $\log_{12}(\sqrt[4]{x}+\sqrt{x})=t$

នាំឲ្យ $\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}=12^t$ **(3)**

យកសមីការ (2) ជំនួសក្នុង (3) គេបាន $3^t+9^t=12^t$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង 12^t គេបាន $(\frac{1}{4})^t+(\frac{3}{4})^t=1$ **(4)**

-ចំពោះ $t=1$ យកជំនួសក្នុងសមីការ (4) គេបាន $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$

នោះ $t=1$ ជាឫសនៃសមីការ (4) ។

-ចំពោះ $t>1$ គេបាន $(\frac{1}{4})^t+(\frac{3}{4})^t<\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$

នោះ (4) គ្មានឫសចំពោះ $t>1$ ។

-ចំពោះ $t<1$ គេបាន $(\frac{1}{4})^t+(\frac{3}{4})^t>\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$

នោះ (4) គ្មានឫសចំពោះ $t>1$ ។

សរុបមកសមីការ (4) មានឫសតែមួយគត់គឺ $t=1$ ។

ចំពោះ $t=1$ តាម (2) គេបាន $x=9^2=81$ ។

យក $x=81$ ទៅជំនួសក្នុងសមីការ (1) គេបាន ៖

$$\log_{12}(\sqrt[4]{81}+\sqrt{81})=\frac{1}{2}\log_9 81$$

$\log_{12}12=\log_9 9$ ពិត

ដូចនេះសមីការមានឫស $x=81$ ។

II-ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(\frac{a+b}{1+a+b})<f(\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b})$

យើងមាន $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$, $x\in IR$

យើងបាន $f'(x)=\dfrac{(x+\sqrt{1+x^2})'}{x+\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}$

$$=\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{(x+\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x^2})}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

ដោយ $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}>0\ ,\ \forall x\in IR$

ដូចនេះអនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ IR ។

ម្យ៉ាងទៀតចំពោះគ្រប់ $a>0,b>0$ គេមាន ៖

$\dfrac{a}{1+a+b}<\dfrac{a}{1+a}$ និង $\dfrac{b}{1+a+b}<\dfrac{b}{1+b}$

គេទាញ $\dfrac{a}{1+a+b}+\dfrac{b}{1+a+b}<\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}$

ឬ $\dfrac{a+b}{1+a+b}<\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}$

ដោយសារតែអនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ IR

ហេតុនេះតាមលក្ខណះអនុគមន៍កើនគេបាន ៖

$\dfrac{a+b}{1+a+b}<\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}$ នោះ $f(\dfrac{a+b}{1+a+b})<f(\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b})$

ដូចនេះ $f(\dfrac{a+b}{1+a+b})<f(\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b})$

ចំពោះគ្រប់ $a>0,b>0$ ។

III-តាង $f(m,n)=\dfrac{(2m)!\,(2n)!}{m!n!(m+n)!}$

-ចំពោះ $n=0$ គេបាន $f(m,0)=\dfrac{(2m)!}{(m!)^2}=C_{2m}^{m}$ ជាចំនួនគត់គ្រប់

ចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន m ។

-យើងមាន $f(m+1,n)=\dfrac{(2m+2)!(2n)!}{(m+1)!n!(m+n+1)!}$

$$=\frac{(2m)!(2n)!(2m+1)(2m+2)}{(m!)(m+1).n!(m+n)!(m+n+1)}$$

$$=\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}.\frac{4m+2}{m+n+1}$$

$$=\frac{4m+2}{m+n+1}f(m,n)$$

ស្រាយដូចគ្នា $f(m,n+1)=\dfrac{4n+2}{m+n+1}f(m,n)$

គេបាន $f(m+1,n)+f(m,n+1)=4f(m,n)$

គេទាញ $f(m,n+1)=4f(m,n)-f(m+1,n)\ (*)$,

យើងនឹងស្រាយតាមកំណើនតាម n ថា $f(m,n)$ ជាចំនួនគត់ ។

ចំពោះ $n=0$ គេបាន $f(m,0)=C_{2m}^{m}$ ជាចំនួនគត់

ចំពោះគ្រប់ $m\in IN\cup\{0\}$ (សម្រាយខាងលើ)។

ឧបមាថា $f(m,n)$ ជាចំនួនគត់គ្រប់ $n\in IN\cup\{0\}$

យើងនឹងស្រាយថា $f(m+1,n)$ ជាចំនួនគត់ដែរ ។

តាម $(*)$ គេទាញបាន $f(m,n+1)$ ជាចំនួនគត់ដែរព្រោះ $f(m,n)$

និង $f(m+1,n)$ ជាចំនួនគត់ ។

ដូចនេះ $\dfrac{(2m)!\,(2n)!}{m!n!(m+n)!}$ ជាចំនួនគត់ ។

IV-បង្ហាញថា $a^3(4b^2-d^2)=b^4(3a-c)$

តាង $\frac{\sin x}{a}=\frac{\sin 2x}{b}=\frac{\sin 3x}{c}=\frac{\sin 4x}{d}=t$

គេទាញ $\begin{cases}\sin x = at\\ \sin 2x = bt\\ \sin 3x = ct\\ \sin 4x = dt\end{cases}$

គេមាន $\sin 4x = 2\sin 2x\cos 2x$

$$\sin^2 4x = 4\sin^2 2x\cos^2 2x$$
$$\sin^2 4x = 4\sin^2 2x(1-\sin^2 2x)$$
$$d^2t^2 \quad = 4b^2t^2(1-b^2t^2)$$

គេទាញ $t^2=\frac{1}{b^2}\left(1-\frac{d^2}{4b^2}\right) \quad (1)$

ម៉្យាងទៀត $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

$$\sin 3x = \sin x(3-4\sin^2 x)$$
$$ct = at(3-4a^2t^2)$$

គេទាញ $t^2 = \frac{1}{4a^2}(3 - \frac{c}{a})$ (2)

ផ្ទឹម (1) និង (2) គេបាន ៖

$$\frac{1}{b^2}\left(1 - \frac{d^2}{4b^2}\right) = \frac{1}{4a^2}\left(3 - \frac{c}{a}\right)$$

$$\frac{4b^2 - d^2}{4b^4} = \frac{3a - c}{4a^3}$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង a^3b^4 គេបាន $a^3(4b^2 - d^2) = b^4(3a - c)$

ដូចនេះ $a^3(4b^2 - d^2) = b^4(3a - c)$ ។