គណិតវិទ្យាថ្ងៃនេះ

គណិតវិទ្យាអាហារូបករណ៍

ត្រៀមអាហារូបករណ៍ ជប៉ុន -សិង្ហបុរី-ចិន-រុស្ស៊ី និង វៀតណាម

រៀបរៀងដោយ លឹម ផល្គុន

ភាគ ២

គណិតវិទ្យា

សម្រាប់ត្រៀមប្រឡងអាហារូបករណ៍

រក្សាសិទ្ធិ ដោយ លឹម ផល្គុន
Tel: 017 768 246
www.mathtoday.wordpress.com

គណៈកម្មការនិពន្ធ និង រៀបរៀង

លឹម ផល្គុន និង អ៊ឹង សំណាង

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យបច្ចេកទេស

លោក យ៉ង់ ឆារី
លោក លឹម ឆុន
លោក សែន ពិសិដ្ឋ

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

លោក លឹម មិត្តសិរ

ការិយកុំព្យូទ័រ

លោក អ៊ឹង សំណាង

អារម្ភកថា

សួស្តីមិត្តអ្នកសិក្សាជាទីស្រឡាញ់រាប់អាន !
សៀវភៅ គណិតវិទ្យាជ្រើសរើសដែលលោកអ្នកកំពុងតែកាន់អាននេះ ខ្ញុំបាទបានរៀបចំឡើងសម្រាប់ទុកជាឯកសារសម្រាប់អ្នកសិក្សាដែលមានបំណងត្រៀមប្រឡងយកអាហារូបករណ៍ទៅសិក្សានៅបរទេស និង សម្រាប់ត្រៀមប្រឡងអាហារូបករណ៍ចូលគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សានានាក្នុងប្រទេស។ យើងខ្ញុំបានជ្រើសរើសលំហាត់ពិសេសៗមកធ្វើដំណោះស្រាយ យ៉ាងពិស្តារព្រមទាំងមានលំហាត់អនុវត្តន៍សម្រាប់អ្នកសិក្សាហ្វឹកហាត់ដោះស្រាយដោយខ្លួនឯង។

យើងខ្ញុំសង្ឃឹមថា សៀវភៅមួយក្បាលនេះ នឹងអាចចូលរួមផ្តល់នូវគំនិត និង វិធីសាស្ត្រថ្មីៗក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់គណិតវិទ្យាកំរិតអាហារូបករណ៍ ចំពោះលោកអ្នកសិក្សាជាពុំខានឡើយ ។

ជាទីបញ្ចប់ខ្ញុំបាទសូមជូនពរចំពោះលោកអ្នក សូមមានសុខភាពល្អមានប្រាជ្ញាឈ្លាសវៃ និង ទទួលបានជោគជ័យក្នុងគ្រប់ភារកិច្ច ។

បាត់ដំបងថ្ងៃទី២៧ឧសភា ឆ្នាំ២០១២
អ្នកនិពន្ធ និង ស្រាវជ្រាវ

លឹម ផល្គុន

Tel :017 768 246
Email: lim_phalkun@ymail.com
Website: www.mathtoday.wordpress.com

វិញ្ញាសាទី០១

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-គេឲ្យសមីការ $x^3 - 2x^2 + x - 7 = 0$ មានឫសបីតាងដោយ α, β, γ ។

ចូរគណនាតម្លៃលេខ $A = \frac{1}{(1-\alpha)^2} + \frac{1}{(1-\beta)^2} + \frac{1}{(1-\gamma)^2}$ ។

II-ចូរប្រៀបធៀបចំនួន $a = \sqrt[3]{3 - \sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3}}$ និង $b = 2\sqrt[3]{3}$ ។

III-គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-x} \sin x.dx$ ដែល $n = 1, 2, 3, ...$ ។

ក/ចូរគណនា I_1 ។

ខ/បង្ហាញថា (I_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្ររួចទាញរក I_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ/គណនាផលបូក $S_n = I_1 + I_2 + ... + I_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ឃ/ទាញរកលីមីតនៃ S_n កាលណា $n \to +\infty$ ។

IV-ចូរស្រាយថាប៊ូលដែលមានកាំ R មានមាឌ $V = \frac{4\pi}{3} R^3$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-គណនាតម្លៃលេខ $A=\frac{1}{(1-\alpha)^2}+\frac{1}{(1-\beta)^2}+\frac{1}{(1-\gamma)^2}$

តាង $f(x)=x^3-2x^2+x-7$ មានឬសបីតាងដោយ α,β,γ ។

គេអាចសរសេរ $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

គេបាន $\ln f(x)=\ln(x-\alpha)+\ln(x-\beta)+\ln(x-\gamma)$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរនៃសមភាពនេះគេបាន ៖

$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}+\frac{1}{x-\gamma}$ ។

ធ្វើដេរីវេម្តងទៀតលើសមភាពនេះគេបាន ៖

$$\frac{f''(x)f(x)-[f'(x)]^2}{f^2(x)}=-\frac{1}{(x-\alpha)^2}-\frac{1}{(x-\beta)^2}-\frac{1}{(x-\gamma)^2}$$

យក $x=1$ គេបាន $\frac{f''(1)f(x)-[f'(1)]^2}{f^2(1)}=-\frac{1}{(1-\alpha)^2}-\frac{1}{(1-\beta)^2}-\frac{1}{(1-\gamma)^2}$

គេទាញបាន $A=-\frac{f''(1)f(1)-[f'(1)]^2}{f^2(1)}$ ។

គេមាន $f(1)=1-2+1-7=-7$

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$ នោះ $f'(1) = 3 - 4 + 1 = 0$

ហើយ $f''(x) = 6x - 4$ នោះ $f''(1) = 6 - 4 = 2$

គេបាន $A = -\dfrac{(2)(-7) - 0^2}{(-7)^2} = \dfrac{2}{7}$

ដូចនេះ $A = \dfrac{1}{(1-\alpha)^2} + \dfrac{1}{(1-\beta)^2} + \dfrac{1}{(1-\gamma)^2} = \dfrac{2}{7}$ ។

II-ប្រៀបធៀបចំនួន $a = \sqrt[3]{3 - \sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3}}$ និង $b = 2\sqrt[3]{3}$

របៀបទី១ ៖ តាង $x = \sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3}}$ និង $y = \sqrt[3]{3 - \sqrt[3]{3}}$

គេមាន $x > y$ នោះ $x^2 > y^2$

គេបាន $x - y > 0$ (1) និង $x^2 - y^2 > 0$ (2)

គុណវិសមភាព (1) និង (2) អង្គ និង អង្គគេបាន ៖

$(x - y)(x^2 - y^2) > 0$ សមមូល $x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង 3 គេបាន ៖

$$3(x^3 + y^3) > 3x^2y + 3xy^2 = (x + y)^3 - (x^3 + y^3)$$

គេទាញ $4(x^3 + y^3) > (x + y)^3$ ឬ $x + y < \sqrt[3]{4(x^3 + y^3)}$ (3)

ជំនួស $x=\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}$ និង $y=\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}$ ក្នុង (3) គេបាន ៖

$$\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}<\sqrt[3]{4(3-\sqrt[3]{3}+3+\sqrt[3]{3})}=2\sqrt[3]{3}$$

ដូចនេះ $a<b$ ។

របៀបទី២ ៖ ឧបមាថា $a<b$ ពិត

គេបាន $\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}<2\sqrt[3]{3}$

សមមូល $\sqrt[3]{1-\frac{\sqrt[3]{3}}{3}}+\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt[3]{3}}{3}}<2$

តាងអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{1+x}$

ដេរីវេ $f'(x)=-\frac{1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}$

បើ $f'(x)=0$ សមមូល $-\frac{1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}=0$

នាំឲ្យ $\sqrt[3]{(1-x)^2}=\sqrt[3]{(1+x)^2}$ ឬ $1-x=1+x$ នោះ $x=0$ ។

បើ $f'(x)>0$ សមមូល $-\frac{1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}>0$

នាំឲ្យ $\sqrt[3]{(1-x)^2} > \sqrt[3]{(1+x)^2}$ ឬ $1-x > 1+x$ នោះ $x < 0$ ។

តារាងសញ្ញានៃ $f'(x)$ ៖

x		0	
$f'(x)$	■	|	$-$
$f(x)$	↗	■	↘

តាមតារាងនេះគេបាន $\forall x \neq 0 : f(x) < 2$

យក $x = \frac{\sqrt[3]{3}}{3}$ គេបាន $f(\frac{\sqrt[3]{3}}{3}) < 2$ ឬ $\sqrt[3]{1-\frac{\sqrt[3]{3}}{3}} + \sqrt[3]{1+\frac{\sqrt[3]{3}}{3}} < 2$

ដូចនេះ $a < b$ ។

III-គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-x}\sin x.dx$ ដែល $n = 1, 2, 3, ...$ ។

ក/គណនា I_1 ៖

បើ $n = 1$ នោះ $I_1 = \int_0^{\pi} e^{-x}\sin x.dx$

តាង $\begin{cases} u = e^{-x} \\ dv = \sin x.dx \end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases} du = -e^{-x}.dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

គេបាន៖

$$I_1 = \left[-e^{-x}\cos x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{-x}\cos x.dx$$

$$I_1 = 1 + e^{-\pi} - \int_0^{\pi} e^{-x}\cos x.dx$$

តាង $\begin{cases} u = e^{-x} \\ dv = \cos x.dx \end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases} du = -e^{-x}.dx \\ v = \sin x \end{cases}$

គេបាន

$$I_1 = 1 + e^{-\pi} - \left[e^{-x}\sin x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{-x}\sin x.dx$$

$$I_1 = 1 + e^{-\pi} - I_1$$

ដូចនេះ $I_1 = \dfrac{1 + e^{-\pi}}{2} = \dfrac{1 + e^{\pi}}{2e^{\pi}}$ ។

ខ/បង្ហាញថា(I_n)ជាស្វីតធរណីមាត្រ ៖

មាន $I_n = \displaystyle\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-x}\sin x.dx$ នោះ $I_{n+1} = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin x.dx$

តាង $x=\pi+t$ នោះ $dx=dt$

ចំពោះ $x=n\pi$ នោះ $t=(n-1)\pi$ និង $x=(n+1)\pi$ នោះ $t=n\pi$

គេបាន $I_{n+1}=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-\pi-t}\sin(\pi+t).dt=-e^{-\pi}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-t}\sin t.dt$

$$I_{n+1}=-e^{-\pi}\,I_n$$ នាំឲ្យ (I_n)ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ទាញរកI_nជាអនុគមន៍នៃn៖

តាមរូបមន្ត $I_n=I_1\times q^{n-1}=\dfrac{1+e^{-\pi}}{2}\times(-e^{-\pi})^{n-1}$ ។

គ/គណនាផលបូក $S_n=I_1+I_2+...+I_n$ ជាអនុគមន៍នៃn៖

គេបាន $S_n=I_1\times\dfrac{1-q^n}{1-q}=\dfrac{1+e^{-\pi}}{2}\times\dfrac{1-(-e^{-\pi})^n}{1+e^{-\pi}}=\dfrac{1-(-e^{-\pi})^n}{2}$

ឃ/ទាញរកលីមីតនៃ S_n កាលណា $n\to+\infty$ ៖

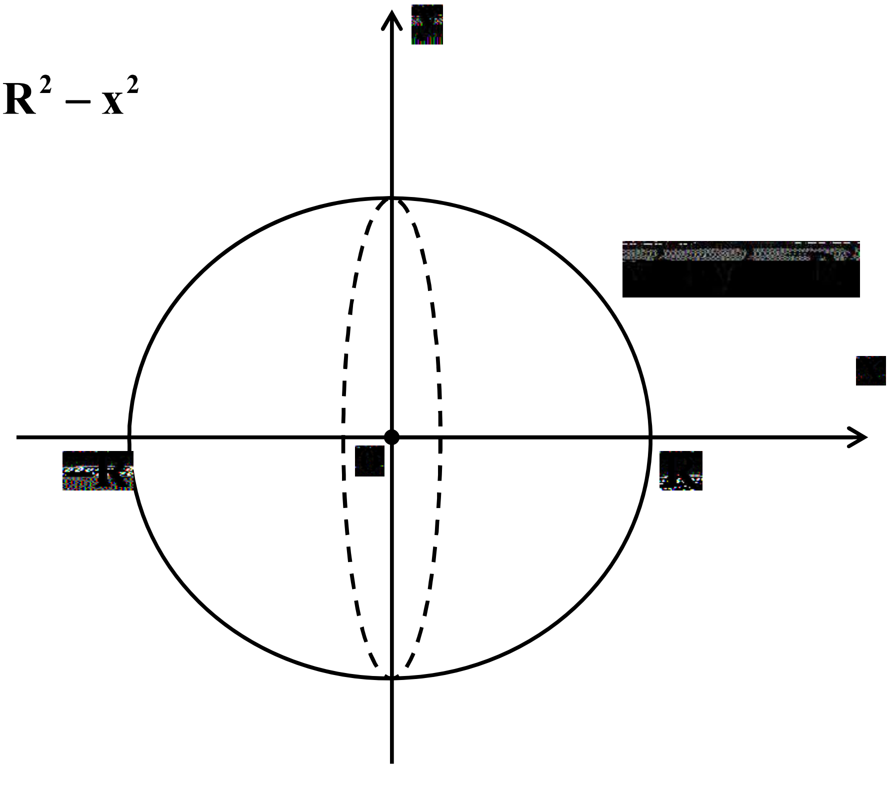
គេបាន $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+(-e^{-\pi})^n}{2}=\dfrac{1}{2}$ ព្រោះ $\lim\limits_{n\to\infty}(-e^{-\pi})^n=0$ ។

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{2}$ ។

IV-ស្រាយថាប៊ូលដែលមានកាំ **R** មានមាឌ $V=\frac{4\pi}{3}R^3$ ៖

យើងដឹងថាប៊ូលកាំគឺជាសូលីដបរិវត្តន៍បង្ករពីរង្វិលផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌ័ ដោយរង្វង់ផ្ចិត **O** កាំ **R** ជុំវិញអក្ស័អាប់ស៊ីស ។

សមីការរង្វង់ផ្ចិត **O** កាំ **R** គឺ ៖



$x^2+y^2=R^2$ ឬ $y^2=R^2-x^2$

មាឌរបស់ប៊ូលគឺ ៖

$$V=\pi\int_{-R}^{R}y^2dx$$

$$=\pi\int_{-R}^{R}(R^2-x^2).dx$$

$$=\pi\left[R^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R}$$

$$=\pi\left[(R^3-\frac{R^3}{3})-(-R^3+\frac{R^3}{3})\right]=\frac{4\pi}{3}R^3$$

ដូចនេះ $V=\frac{4\pi}{3}R^3$ ។

វិញ្ញាសាទី០២

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមក្នុង IR ៖

$$\sqrt{\frac{x^2-5x-5}{x^2-5x+2}}+\sqrt{\frac{x^2-5x-4}{x^2-5x+3}}=\frac{7}{x^2-5x+2}\sqrt{\frac{x^2-5x+2}{x^2-5x+3}}$$

II-គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)$ កំនត់ដោយ ៖

$$2\,f(x-1)+f\left(\frac{x-1}{1-2x}\right)=x+1$$ ចំពោះគ្រប់ $x\neq\frac{1}{2}$ និង $x\neq-\frac{1}{2}$

ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ $f(x)$ ។

III-គេឱ្យអាំងតេក្រាល $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^3 x.dx$ ដែល $n\in IN$

ក. ចូរគណនា I_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ. ចូរគណនាផលបូក $S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(I_k\right)=I_0+I_1+I_2+........+I_n$

ជាអនុគមន៍នៃ n ។ រួចទាញរកតម្លៃនៃលីមីត $\lim_{n\to+\infty}S_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-ដោះស្រាយសមីការ

តាង $y = x^2 - 5x$ សមីការអាចសរសេរ ៖

$$\sqrt{\frac{y-5}{y+2}} + \sqrt{\frac{y-4}{y+3}} = \frac{7}{y+2}\sqrt{\frac{y+2}{y+3}} \quad (1)$$

សមីការ (1) មានន័យកាលណា $y \ge 5$ ។

ក្នុងលក្ខខ័ណ្ឌនេះសមីការអាចសរសេរ ៖

$$\sqrt{(y-5)(y+3)} + \sqrt{(y-4)(y+2)} = 7$$

$$\sqrt{y^2 - 2y - 15} + \sqrt{y^2 - 2y - 8} = 7 \quad (2)$$

តាង $z = y^2 - 2y - 8 \ge 0$ សមីការ(2)អាចសរសេរ ៖

$$\sqrt{z-7} + \sqrt{z} = 7$$

$$2z - 7 + 2\sqrt{z(z-7)} = 49$$

$$\sqrt{z^2 - 7z} = 28 - z \quad (0 \le z \le 28)$$

$$z^2 - 7z = 784 - 56z + z^2$$

$$49z = 784 \Rightarrow z = 16$$

ដោយ $0 \le z \le 28$ នាំឲ្យ $z = 16$ (យក)

គេទាញ $y^2 - 2y - 8 = 16$ ឬ $y^2 - 2y - 24 = 0$

មានឬស $y_1 = -4$, $y_2 = 6$

ដោយ $y \ge 5$ នាំឲ្យគេទាញបាន $y = 6$ ជាឬសសមីការ(1)

ដោយ $y = x^2 - 5x$ គេបាន $x^2 - 5x = 6$

ឬ $x^2 - 5x - 6 = 0$ គេទាញឬស $x_1 = -1$, $x_2 = 6$ ។

II-កំនត់រកអនុគមន៍ $f(x)$ ៖

គេមាន $2\,f(x-1) + f(\frac{x-1}{1-2x}) = x+1$ (1) ចំពោះគ្រប់ $x \ne \frac{1}{2}$

យក $x - 1 = \frac{t-1}{1-2t}$ នាំឲ្យ $x = -\frac{t}{1-2t}$ ជួសក្នុង (1) គេបាន ៖

$$2f(\frac{t-1}{1-2t}) + f(\frac{-\frac{t}{1-2t}-1}{1+\frac{2t}{1-2t}}) = -\frac{t}{1-2t} + 2$$

$$2f(\frac{t-1}{1-2t}) + f(t-1) = \frac{2-5t}{1-2t} \quad (2)$$

យក $x=t$ ជួសក្នុង (1) គេបាន $2f(t-1)+f(\frac{t-1}{1-2t})=t+1$

ឬ $-4f(t-1)-2f(\frac{t-1}{1-2t})=-2t-2$ (3)

បូកសមីការ (2) និង (3)គេបាន ៖

$$-3f(t-1)=\frac{2-5t}{1-2t}-2t-2=\frac{4t^2-t-2}{1-2t}$$

គេទាញ $f(t-1)=\frac{4t^2-t-2}{3(2t-1)}$ យក $t-1=x$ ឬ $t=x+1$

គេបាន $f(x)=\frac{4(x+1)^2-(x+1)-2}{3(2x+2-1)}=\frac{4x^2+7x+1}{3(2x+1)}$

ដូចនេះ $f(x)=\frac{4x^2+7x+1}{3(2x+1)}$ ។

III-ក. គណនា I_n ជាអនុគមន៍នៃ **n**

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^3 x.dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^2 x.\cos x.dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x(1-\sin^2 x)\cos x.dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^n x - \sin^{n+2} x)\cos x.dx$$

តាង $U = \sin x$ នោះ $dU = \cos x.dx$ បើ $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ នោះ $U \in [0\,,1\,]$

$$I_n = \int_0^1 U^n(1-U^2).dU = \int_0^1 U^n.dU - \int_0^1 U^{n+2}.dU$$

$$= \left[\frac{1}{n+1}U^{n+1}\right]_0^1 - \left[\frac{1}{n+3}U^{n+3}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} = \frac{n+3-n-1}{(n+1)(n+3)} = \frac{2}{(n+1)(n+3)}$$

ដូចនេះ $\boxed{I_n = \frac{2}{(n+1)(n+3)}}$ ។

ខ. គណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=0}^{n}\left(I_k\right) = I_0 + I_1 + I_2 + ... + I_n$

តាមសម្រាយខាងលើយើងមាន៖

$$I_n = \frac{2}{(n+1)(n+3)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}$$
$$= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\left[\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) + \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}\right)\right]$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) + \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}\right)$$
$$= \left[(1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + ... + (\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2})\right] + \left[(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + ... + (\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3})\right]$$
$$= \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+3}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} = \frac{(n+1)(3n+8)}{2(n+2)(n+3)}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = \frac{(n+1)(3n+8)}{2(n+2)(n+3)}}$ និង $\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{3}{2}}$ ។

វិញ្ញាសាទី០៣

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-គេឱ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^a \frac{x^n.dx}{x^3 + a^3}$, $a > 0$

ក. ចូរកំនត់តម្លៃរបស់ n ដើម្បីឱ្យ I_n មិនអាស្រ័យនឹង a ។

ខ. គណនា I_n ចំពោះតម្លៃ n ដែលបានរកឃើញខាងលើ ។

II-គេឱ្យស្វ៊ីត $S_n = \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}}$ ដែល $n \in IN$ ។

ក-ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ ចូរបង្ហាញថា $S_n = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ ។

ខ-គណនាផលបូក

$$\Sigma_n = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + ... + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}}$$

III-ចូរកំនត់គ្រប់តម្លៃ x ក្នុងចន្លោះ $]0;\frac{\pi}{2}[$ ដោយដឹងថា ៖

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sin x}+\frac{\sqrt{3}+1}{\cos x}=4\sqrt{2}$$

IV-ក. ចូរគណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\sin\frac{\pi}{10}$ និង $\cos\frac{\pi}{10}$

ខ. ចូរស្រាយថា $x^2+(x-y)^2\le 4(x^2+y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$

គ្រប់ចំនួន $x,y\in IR$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-ក. កំនត់តម្លៃរបស់ n ដើម្បីឱ្យ I_n មិនអាស្រ័យនឹង a

យើងមាន $I_n=\int_0^a \frac{x^n.dx}{x^3+a^3}$, $a>0$

យើងតាង $x=a.t$ នាំឱ្យ $dx=a.dt$

ហើយចំពោះ $x\in\left[0,a\right]$ នាំឱ្យ $t\in\left[0,1\right]$

គេបាន $I_n = \int_0^1 \frac{(a.t)^n.a.dt}{(at)^3 + a^3} = a^{n-2}.\int_0^1 \frac{t^n.dt}{t^3+1}$

តាមទំនាក់ទំនងនេះ ដើម្បីឱ្យ I_n មិនអាស្រ័យនឹង a លុះត្រាតែ

$n - 2 = 0$ ឬ $n = 2$ ។

ដូចនេះ ដើម្បីឱ្យ I_n មិនអាស្រ័យនឹង a គេត្រូវឱ្យ $n = 2$ ។

ខ. គណនា I_n ចំពោះតម្លៃ n ដែលបានរកឃើញខាងលើ

ចំពោះ $n = 2$ គេបាន $I_2 = \int_0^1 \frac{x^2dx}{x^3+1}$

តាង $U = x^3 + 1$ នាំឱ្យ $dU = 3x^2.dx$

ហើយចំពោះ $x \in [0,1]$ នាំឱ្យ $U \in [1\ ,\ 2]$

យើងបាន $I_2 = \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{dU}{U} = \frac{1}{3}[\ln|U|]_1^2 = \frac{1}{3}\ln 2$ ។

ដូចនេះ $\boxed{I_2 = \frac{1}{3}\ln 2}$ ។

II-ក.បង្ហាញថា $S_n = 1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

យើងមាន $S_n = \sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}$

$$= \sqrt{\frac{n^2(n+1)^2+(n+1)^2+n^2}{n^2(n+1)^2}} = \sqrt{\frac{n^2(n+1)^2+n^2+2n+1+n^2}{n^2(n+1)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{n^2(n+1)^2+2n(n+1)+1}{n^2(n+1)^2}} = \sqrt{\frac{[n(n+1)+1]^2}{n^2(n+1)^2}}$$

$$= \frac{n(n+1)+1}{n(n+1)} = 1+\frac{1}{n(n+1)} = 1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = 1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}$ ។

ខ-គណនាផលបូក៖

គេបាន $\Sigma_n = \sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+.....+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}} = \sum_{k=1}^{n}(S_k)$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = n+1-\frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)^2-1}{n(n+1)} = \frac{n(n+2)}{n+1}$$

ដូចនេះ $\boxed{\Sigma_n = \frac{n(n+2)}{n+1}}$ ។

III-កំនត់គ្រប់តម្លៃ x ក្នុងចន្លោះ $]0;\frac{\pi}{2}[$

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sin x}+\frac{\sqrt{3}+1}{\cos x}=4\sqrt{2} \quad (1)$$

គេពិនិត្យ $\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$

$$=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

ហើយ $\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$

$$=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

សមីការ (1) អាចសរសេរទៅជា ៖

$$\frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}{\sin x}+\frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}{\cos x}=2$$

$$\frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\sin x}+\frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\cos x}=2$$

$$\frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\sin x}+\frac{\cos\frac{\pi}{12}}{\cos x}=2$$

$$\sin\frac{\pi}{12}\cos x+\sin x\cos\frac{\pi}{12}=2\sin x\cos x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}+x\right)=\sin 2x$$

ដោយ $0<x<\frac{\pi}{2}$ នោះគេទាញបាន $\left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{12}+x=2x\\ \frac{\pi}{12}+x=\pi-2x\end{array}\right.$

គេទាញ $x=\frac{\pi}{12}$ ឬ $x=\frac{11\pi}{36}$ (ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងលក្ខខ័ណ្ឌដែលឲ្យ)

ដូចនេះ $x\in\{\frac{\pi}{12}\ ;\ \frac{11\pi}{36}\}$ ។

IV-ក. គណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\sin\frac{\pi}{10}$ និង $\cos\frac{\pi}{10}$

គេមាន $\frac{2\pi}{10}=\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{10}$

គេបាន $\sin\frac{2\pi}{10}=\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{10})=\cos\frac{3\pi}{10}$

តាមរូបមន្តត្រីកោណមាត្រ ៖

$\sin 2a = 2\sin a\cos a$ និង $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$

$$2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}=\cos\frac{3\pi}{10}$$

$$2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}=3\cos\frac{\pi}{10}-4\cos^3\frac{\pi}{10}$$

$$2\sin\frac{\pi}{10}=3-4\cos^2\frac{\pi}{10}$$

$$2\sin\frac{\pi}{10}=3-4(1-\sin^2\frac{\pi}{10})$$

ឬ $4\sin^2\frac{\pi}{10}-2\sin\frac{\pi}{10}-1=0$ តាង $t=\sin\frac{\pi}{10}>0$

គេបាន $4t^2-2t-1=0$, $\Delta'=1+4=5>0$

គេទាញឫស $t_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{4} < 0$ (មិនយក) , $t_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

ដូចនេះ $\sin\frac{\pi}{10} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ ។

ដោយ $\sin^2\frac{\pi}{10} + \cos^2\frac{\pi}{10} = 1$

នាំឲ្យ $\cos\frac{\pi}{10} = \sqrt{1-(\frac{1+\sqrt{5}}{4})^2} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

ដូចនេះ $\cos\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ ។

ខ. ស្រាយថា $x^2 + (x-y)^2 \le 4(x^2+y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$

តាងអនុគមន៍ $f(x;y) = x^2 + (x-y)^2 - 4(x^2+y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$

គេបាន ៖

$$f(x;y) = x^2 + x^2 - 2xy + y^2 - 4(x^2+y^2)(\frac{1+\sqrt{5}}{4})^2$$

$$= 2x^2 - 2xy + y^2 - 4(x^2 + y^2)\frac{6 + 2\sqrt{5}}{16}$$

$$= 2x^2 - 2xy + y^2 - (x^2 + y^2)\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\, x^2 - 2xy - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} y^2$$

$$= -\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\, x^2 + 2xy + \frac{\sqrt{5} + 1}{2}\, y^2 \right)$$

$$= -\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}\, x + \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 1}{2}}\, y \right)^2 \leq 0 \quad , \forall x, y \in IR$$

ដូចនេះ $x^2 + (x - y)^2 \leq 4(x^2 + y^2)\sin^2 \frac{\pi}{10}$ ។

វិញ្ញាសាទី០៤

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$\log^2_{6-x}(54-x^3)-5\log_{6-x}(54-x^3)+6=0 \ .$$

II-គេឲ្យ z_1 និង z_2 ជាចំនួនកុំផ្លិចពីរដែល $|z_1|=|z_2|=1$

និង $z_1.z_2 \neq -1$ ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ ជាចំនួនពិតមួយ ។

III-គេឱ្យស្វ៊ីតអាំងតេក្រាល $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,.dx$ ដែល $n\in IN$ ។

ក. ចូររកទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n-2}

ខ. គណនាផលគុណ $P_n=I_n.I_{n-1}\ ,\forall n\geq 1$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ. គណនាផលបូក $S_n=\sum_{k=1}^{n}(P_k)=P_1+P_2+.........+P_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n

រួចទាញរកតម្លៃនៃលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ។

ឃ. រករូបមន្តគណនា I_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

I-ដោះស្រាយសមីការ ៖

$\log^2_{6-x}(54-x^3)-5\log_{6-x}(54-x^3)+6=0 \quad (1)$.

លក្ខខ័ណ្ឌ $\begin{cases}54-x^3>0\\6-x>0\\6-x\neq1\end{cases}$ សមមូល $\begin{cases}x<3\sqrt[3]{2}\\x<6\\x\neq5\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}x<3\sqrt[3]{2}\\x\neq5\end{cases}$

តាង $y=\log_{6-x}(54-x^3)$ សមីការ (1) អាចសរសេរ ៖

$y^2-5y+6=0$, $\Delta=25-24=1$ គេទាញឫស $y_1=2$, $y_2=3$

-ចំពោះ $y=2$ គេបាន $\log_{6-x}(54-x^3)=2$

$$54-x^3=(6-x)^2$$
$$54-x^3=36-12x+x^2$$
$$x^3+x^2-12x-18=0$$
$$(x+3)(x^2-2x-6)=0$$

គេទាញឫស $x_1 = -3$, $x_2 = 1-\sqrt{7}$, $x_3 = 1+\sqrt{7}$

-ចំពោះ $y = 3$ គេបាន $\log_{6-x}(54 - x^3) = 3$

$$(54 - x^3) = (6 - x)^3$$
$$18x^2 - 108x + 162 = 0$$
$$18(x-3)^2 = 0$$

គេទាញឫស $x = 3$ ។

II-ស្រាយថា $\dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ ជាចំនួនពិតមួយ

តាង $Z = \dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ នោះ $\overline{Z} = \dfrac{\overline{z}_1 + \overline{z}_2}{1 + \overline{z}_1 . \overline{z}_2}$

ដោយ $z_1 . \overline{z}_1 = |z_1|^2 = 1$ នោះ $\overline{z}_1 = \dfrac{1}{z_1}$ ហើយដូចគ្នា $\overline{z}_2 = \dfrac{1}{z_2}$

គេបាន $\overline{Z} = \dfrac{\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2}}{1 + \dfrac{1}{z_1} . \dfrac{1}{z_2}} = \dfrac{z_2 + z_1}{z_2 z_1 + 1} = Z$

ដោយ $\overline{Z} = Z$ នោះ $Z = \dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ ជាចំនួនពិត ។

III-ក. រកទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n-2}

យើងមាន $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,.dx$ និង $I_{n-2}=\int_0^1 x^{n-2}.\sqrt{1-x^2}.dx$

តាង $\begin{cases} U=\sqrt{1-x^2} \\ dV=x^n.dx \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} dU=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}.dx \\ V=\int x^n.dx=\dfrac{1}{n+1}x^{n+1} \end{cases}$

យើងបាន $I_n=\left[\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}.\sqrt{1-x^2}\right]_0^1+\dfrac{1}{n+1}\int_0^1\dfrac{x^{n+2}}{\sqrt{1-x^2}}.dx$

$$I_n=\frac{1}{n+1}\int_0^1\frac{x^n-(x^n-x^{n+2})}{\sqrt{1-x^2}}.dx=\frac{1}{n+1}\int_0^1\frac{x^n-x^n(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}.dx$$

$$I_n=\frac{1}{n+1}\int_0^1\frac{x^n.dx}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{n+1}\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}.dx$$

$$I_n=\frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n-1}.\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{n+1}I_n$$

តាង $\begin{cases} U=x^{n-1} \\ dV=\dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} dU=(n-1)x^{n-2}.dx \\ V=-\sqrt{1-x^2} \end{cases}$

យើងបាន $I_n = \frac{1}{n+1}\left\{ \left[-x^{n-1}\sqrt{1-x^2} \right]_0^1 + (n-1)\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1-x^2}.dx \right\} - \frac{1}{n+1}I_n$

គេទាញ $(n+1)I_n = (n-1)I_{n-2} - I_n$ នាំឱ្យ $I_n = \frac{n-1}{n+2}I_{n-2}$

ដូចនេះ ទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n-2}

គឺ $\boxed{I_n = \frac{n-1}{n+2}I_{n-2}\,,\ \forall n \geq 2}$ ។

ខ. គណនាផលគុណ $P_n = I_n.I_{n-1}\ ,\ \forall n \geq 1$ ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងមាន $P_n = I_n.I_{n-1}$ នាំឱ្យ $P_{n+1} = I_{n+1}.I_n$

ដោយ $I_n = \frac{n-1}{n+2}I_{n-2}$ នាំឱ្យ $I_{n+1} = \frac{n}{n+3}.I_{n-1}$

គេទាញ $P_{n+1} = \frac{n}{n+3}I_{n-1}.I_n = \frac{n}{n+3}P_n$ (ព្រោះ $P_n = I_n.I_{n-1}$)

នាំអោយ $\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{n}{n+3} = \frac{n}{n+1}.\frac{n+1}{n+2}.\frac{n+2}{n+3}$ ។

យើងបាន $\prod_{k=1}^{(n-1)}\left(\frac{P_{k+1}}{P_k}\right) = \prod_{k=1}^{(n-1)}\left(\frac{k}{k+1}.\frac{k+1}{k+2}.\frac{k+2}{k+3}\right)$

$$\prod_{k=1}^{(n-1)}\left(\frac{P_{k+1}}{P_k}\right)=\prod_{k=1}^{(n-1)}\left(\frac{k}{k+1}\right)\times\prod_{k=1}^{(n-1)}\left(\frac{k+1}{k+2}\right)\times\prod_{k=1}^{(n-1)}\left(\frac{k+2}{k+3}\right)$$

$$\frac{P_2}{P_1}.\frac{P_3}{P_2}....\frac{P_n}{P_{n-1}}=\left(\frac{1}{2}.\frac{2}{3}....\frac{n-1}{n}\right)\times\left(\frac{2}{3}.\frac{3}{4}....\frac{n}{n+1}\right)\times\left(\frac{3}{4}.\frac{4}{5}....\frac{n+1}{n+2}\right)$$

$$\frac{P_n}{P_1}=\frac{1}{n}.\frac{2}{n+1}.\frac{3}{n+2}$$

នាំឱ្យគេទាញ $P_n=\dfrac{6}{n(n+1)(n+2)}.P_1=\dfrac{6}{n(n+1)(n+2)}.I_0.I_1$

ដោយ $I_0=\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-x^2}.dx=\left[\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x\right]_0^1=\frac{\pi}{4}$

និង $I_1=\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}.dx=\left[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{1}{3}$

គេបាន $P_n=\dfrac{6}{n(n+1)(n+2)}.\dfrac{\pi}{4}.\dfrac{1}{3}=\dfrac{\pi}{2}.\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

ដូចនេះ $\boxed{P_n=\dfrac{\pi}{2}.\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}}$ ។

គ. គណនាផលបូក $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(P_k\right)=P_1+P_2+.........+P_n$

យើងមាន៖

$$P_n = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

យើងបាន $S_n = \frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$

$$= \frac{\pi}{4}\left[(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3}) + (\frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4}) + \ldots\ldots + \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right] = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}}$ និង $\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi}{8}}$ ។

ឃ. រករូបមន្តគណនា I_n ជាអនុគមន៍នៃ n

តាមសម្រាយខាងលើយើងមាន $I_n = \frac{n-1}{n+2} I_{n-2}, \forall n \geq 2$

-ករណី $n = 2p+1$ (ចំនួនសេស)

យើងបាន $I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+3} . I_{2p-1}$ ឬ $\frac{I_{2p+1}}{I_{2p-1}} = \frac{2p}{2p+3}$

គេទាញ $\frac{I_3}{I_1} \cdot \frac{I_5}{I_3} \cdot \frac{I_7}{I_5} \ldots\ldots \frac{I_{2p+1}}{I_{2p-1}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{6}{9} \ldots\ldots \frac{2p}{2p+3}$

$$\frac{I_{2p+1}}{I_1} = \frac{2}{5}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{6}{9}\cdots\cdots\frac{2p}{2p+3}$$

នាំឱ្យ $I_{2p+1} = \frac{2.4.6....2p}{5.7.9....(2p+3)}.I_1$ ដោយ $I_1 = \frac{1}{3}$

ដូចនេះ $\boxed{I_{2p+1} = \frac{2.4.6....2p}{5.7.9....(2p+3)}\cdot\frac{1}{3}}$ ។

-ករណី $n = 2p$ (ចំនួនគូ)

យើងបាន $I_{2p} = \frac{2p-1}{2p+2}.I_{2p-2}$ ឬ $\frac{I_{2p}}{I_{2p-2}} = \frac{2p-1}{2p+2}$

គេទាញ $\frac{I_2}{I_0}\cdot\frac{I_4}{I_2}\cdot\frac{I_6}{I_4}\cdots\cdots\frac{I_{2p}}{I_{2p-2}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}\cdots\cdots\frac{2p-1}{2p+2}$

$$\frac{I_{2p}}{I_0} = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}\cdots\cdots\frac{2p-1}{2p+2}$$

នាំឱ្យ $I_{2p+1} = \frac{1.3.5....(2p-1)}{4.6.8....(2p+2)}.I_0$ ដោយ $I_0 = \frac{\pi}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{I_{2p+1} = \frac{1.3.5....(2p-1)}{4.6.8....(2p+2)}\cdot\frac{\pi}{4}}$ ។

វិញ្ញាសាទី០៥

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$1+\log^2_{(3-x)^3}(9x^2-x^3)=\frac{1}{3}\log_{\sqrt{3-x}}(9x^2-x^3)\ .$$

II-ចូរបង្ហាញថា $\int_a^b f(x).dx=\int_a^b f(a+b-x).dx$

អនុវត្តន៍ ៖ ចូរគណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\ln(1+\sqrt{3}\tan x).dx$

III-គេឲ្យសមីការ $(E):\ x^3-mx^2+7(m-5)x-14m+90=0$

ក. ដោះស្រាយសមីការនេះចំពោះ $m=6$ ។

ខ. កំនត់ m ដើម្បីឲ្យសមីការមានឫសបី $x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $x_1^3+x_2^3+x_3^3=73$

រួចគណនាឫសទាំងបីនោះ ។

IV-គេអោយអាំងតេក្រាល៖

$$I_n = \int_{na}^{(n+1)a} \frac{dx}{\cos^2 x} \text{ និង } J_n = \int_{a}^{(n+1)a} \frac{dx}{\cos^2 x} \quad ,n \in IN, a > 0$$ ។

ក-បង្ហាញថា $I_1 + I_2 + I_3 + ... + I_n = J_n$ ។

ខ-គណនា I_n និង J_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ-ប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរបង្រួមផលបូក៖

$$S_n = \frac{1}{\cos a \cos 2a} + \frac{1}{\cos 2a \cos 3a} + ... + \frac{1}{\cos(na)\cos(n+1)a}$$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-ដោះស្រាយសមីការ ៖

. $$1 + \log^2_{(3-x)^3}(9x^2 - x^3) = \frac{1}{3}\log_{\sqrt{3-x}}(9x^2 - x^3) \quad (1)$$

លក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} 9x^2 - x^3 > 0 \\ 3 - x > 0 \\ 3 - x \neq 1 \end{cases}$ សមមូល $\begin{cases} x \neq 0 \quad , \ x < 9 \\ x < 3 \\ x \neq 2 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} x < 3 \\ x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$

សមីការ(1)អាចសរសេរ ៖

$$1+\frac{1}{9}\log^2_{3-x}(9x^2-x^3)=\frac{2}{3}\log_{3-x}(9x^2-x^3)$$

$$\log^2_{3-x}(9x^2-x^3)-6\log_{3-x}(9x^2-x^3)+9=0$$

$$\left[\log_{3-x}(9x^2-x^3)\ -3\ \right]^2=0$$

$$\log_{3-x}(9x^2-x^3)=3$$

$$9x^2-x^3=(3-x)^3$$

$$9x^2-x^3=27-27x+9x^2-x^3$$

$$27x-27=0$$

ដូចនេះសមីការមានឫស $x=1$ ។

II-បង្ហាញថា $\int_a^b f(x).dx=\int_a^b f(a+b-x).dx$

តាង $t=a+b-x \Rightarrow dt=-dx$

បើ $x=a\Rightarrow t=b$ និង $x=b\Rightarrow t=a$

យើងបាន $\int_a^b f(x).dx=\int_b^a f(a+b-t)(-dt)=-\int_b^a f(a+b-t).dt=\int_a^b f(a+b-t).dt$

ដូចនេះ: $\int_a^b f(x).dx=\int_a^b f(a+b-x).dx$ ។

គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\ln(1+\sqrt{3}\tan x).dx$

តាមរូបមន្តខាងលើយើងអាចសរសេរ៖

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\ln\left[1+\sqrt{3}\tan(\frac{\pi}{3}-x)\right].dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\ln\left(1+\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}-\tan x}{1+\sqrt{3}\tan x}\right).dx$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\ln\left(\frac{4}{1+\sqrt{3}\tan x}\right).dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left[\ln 4-\ln(1+\sqrt{3}\tan x)\right].dx$$

$$I=\ln 4\int_0^{\frac{\pi}{3}}dx-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\ln(1+\sqrt{3}\tan x).dx=\frac{2\pi}{3}\ln 2-I$$

$2I=\frac{2\pi}{3}\ln 2$ នាំឱ្យ $I=\frac{\pi}{3}\ln 2$

ដូចនេះ $\boxed{I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\ln(1+\sqrt{3}\tan x).dx=\frac{\pi}{3}\ln 2}$ ។

III-ក. ដោះស្រាយសមីការ

ចំពោះ $m=6$ សមីការអាចសរសេរ ៖

$$x^3 - 6x^2 + 7x + 6 = 0$$
$$x^3 - 3x^2 - 3x^2 + 9x - 2x + 6 = 0$$
$$x^2(x-3) - 3x(x-3) - 2(x-3) = 0$$
$$(x-3)(x^2 - 3x - 2) = 0$$

គេទាញឫស $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{3-\sqrt{17}}{2}$; $x_3 = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$ ។

ខ. កំនត់តម្លៃរបស់ m

គេមាន $(E): x^3 - mx^2 + 7(m-5)x - 14m + 90 = 0$

ដែល m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។

បើ x_1 , x_2 , x_3 ជាឫសរបស់សមីការនោះតាមទ្រឹស្តីបទវ្យែតគេមាន ៖

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = m & (1) \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 7(m-5) & (2) \\ x_1x_2x_3 = 14m - 19 & (3) \end{cases}$$

តាមបំរាប់គេមាន $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 73$ (4)

ដោយគេមាន ៖

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)^3-3(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

គេអាចសរសេរ $73-3(14m-90)=m^3-3m\left[7(m-5)\right]$

$$73-42m+270=m^3-21m^2+105m$$
$$m^3-21m^2+147m-343=0$$
$$(m-7)^3=0$$

ដូចនេះគេទាញបាន $m=7$ ។

ចំពោះ $m=7$ សមីការសរសេរ ៖

$$x^3-7x^2+14x-8=0$$
$$x^3-x^2-6x^2+6x+8x-8=0$$
$$x^2(x-1)-6x(x-1)+8(x-1)=0$$
$$(x-1)(x^2-6x+8)=0$$
$$(x-1)(x-2)(x-4)=0$$

គេទាញឫស $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=4$ ។

IV-ក-បង្ហាញថា $I_1+I_2+I_3+....+I_n=J_n$

$$I_1+I_2+I_3+....+I_n=\int_a^{2a}\frac{dx}{\cos^2 x}+\int_{2a}^{3a}\frac{dx}{\cos^2 x}+...+\int_{na}^{(n+1)a}\frac{dx}{\cos^2 x}=\int_a^{(n+1)a}\frac{dx}{\cos^2 x}$$

ដូចនេះ $I_1 + I_2 + I_3 + ... + I_n = J_n$ ។

ខ-គណនា I_n និង J_n ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងបាន៖

$$I_n = \int_{na}^{(n+1)a} \frac{dx}{\cos^2 x} = \Big[\ \tan x\ \Big]_{na}^{(n+1)a} = \tan(n+1)a - \tan(na) = \frac{\sin a}{\cos(na).\cos(n+1)a}$$

និង $$J_n = \int_{a}^{(n+1)a} \frac{dx}{\cos^2 x} = \Big[\ \tan x\ \Big]_{a}^{(n+1)a} = \tan(n+1)a - \tan a = \frac{\sin(na)}{\cos a.\cos(n+1)a}$$

ដូចនេះ $$\boxed{I_n = \frac{\sin a}{\cos(na)\cos(n+1)a}\ ,\ J_n = \frac{\sin(na)}{\cos a.\cos(n+1)a}}$$ ។

គ-គណនាផលបូក

$$S_n = \frac{1}{\cos a \cos 2a} + \frac{1}{\cos 2a \cos 3a} + ... + \frac{1}{\cos(na)\cos(n+1)a}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{\cos ka.\cos(k+1)a}\right] = \frac{1}{\sin a}\sum_{k=1}^{n}\left[I_k\right] = \frac{1}{\sin a}.J_n = \frac{\sin(na)}{\sin a \cos a \cos(n+1)a}$$

ដូចនេះ $$S_n = \frac{\sin na}{\sin a \cos a \cos(n+1)a}$$

វិញ្ញាសាទី០៦

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-គេឱ្យខ្សែកោង $(H): y=\frac{2(x-1)}{x-2}$ និងចំនុច $I(2\,;2)$ ។

ចូរកំនត់រកសមីការរង្វង់ (C) មានផ្ចិត I ហើយប៉ះនឹងខ្សែកោង (H) ។

II-គេឧបមាថា S_m និង S_n ជាផលបូក m តួដំបូង និង n តួដំបូង

រៀងគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយដែល $\frac{S_m}{S_n}=\frac{m^2}{n^2}; (m\neq n)$ ។

តាង U_m ជាតួទី m និង U_n ជាតួទី n ។បង្ហាញថា $\frac{U_m}{U_n}=\frac{2m-1}{2n-1}$

III-គេមានអាំងតេក្រាល $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x}$ និង $J=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^3 x}$

ក-កំនត់ពីរចំនួនពិត a, b ដើម្បីឱ្យ $\frac{1}{\sin x}=\frac{a\sin x}{1+\cos x}+\frac{b\sin x}{1-\cos x}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល I រួចទាញរកតម្លៃ J ។

IV-គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$u_0 = 1$ និង $u_{n+1} = \dfrac{u_n^{\,4}}{4u_n^{\,3} + 6u_n^{\,2} + 4u_n + 1}$ គ្រប់ $n \in IN$

ចូរបង្ហាញថា $1 + \dfrac{1}{u_{n+1}} = \left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right)^4$ គ្រប់ $n \in IN$

រួចគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

I-កំនត់រកសមីការរង្វង់ (C)

គេមាន $(H): y = \dfrac{2(x-1)}{x-2}$ និងចំនុច $I(2\,;\,2)$

តាមរូបមន្តសមីការរង្វង់ (C) មានផ្ចិត $I(2\,;\,2)$ សរសេរ៖

$(C): (x-2)^2 + (y-2)^2 = R^2$ ដែល R ជាកាំនៃរង្វង់ ។

សមីការអាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាង (H) និង (C) សរសេរ៖

$$(x-2)^2+\left[\frac{2(x-1)}{x-2}-2\right]^2=R^2$$

$$(x-2)^2+\left(\frac{2x-2-2x+4}{x-2}\right)^2=R^2$$

$$(x-2)^2+\frac{4}{(x-2)^2}=R^2 \quad , \quad X=(x-2)^2$$

$X+\frac{4}{X}=R^2$ នាំឱ្យ $X^2-R^2X+4=0$ (1)

ដើម្បីឱ្យរង្វង់ (C) ប៉ះនឹងខ្សែកោង (H) លុះត្រាតែសមីការ (1)

មានឫសឌុបពោលគឺគេត្រូវឱ្យ $\Delta=R^4-16=0$ នាំឱ្យ

$R=\sqrt[4]{16}=2$ ។

សមីការរង្វង់ (C) អាចសរសេរ៖

$$(x-2)^2+(y-2)^2=4$$
$$x^2-4x+4+y^2-4y+4-4=0$$

ដូចនេះ $(C):\ x^2+y^2-4x-4y+4=0$ ។

II-បង្ហាញថា $\frac{U_m}{U_n}=\frac{2m-1}{2n-1}$

យើងមាន $\frac{S_m}{S_n}=\frac{m^2}{n^2}$ ដោយ $S_m=\frac{m(U_1+U_m)}{2}$; $S_n=\frac{n(U_1+U_n)}{2}$

គេបាន $\frac{m(U_1+U_m)}{2}\times\frac{2}{n(U_1+U_n)}=\frac{m^2}{n^2}$ នាំឱ្យ $\frac{U_1+U_m}{U_1+U_n}=\frac{m}{n}$ (1)

ដោយ $U_m=U_1+(m-1).d$, $U_n=U_1+(n-1).d$

ដែល d ជាផលសងរួមនៃស្វីត។

យក $U_m=U_1+(m-1).d$, $U_n=U_1+(n-1).d$ ជួសក្នុង (1) គេបាន

$\frac{2U_1+(m-1).d}{2U_1+(n-1)d}=\frac{m}{n}$ ឬ $2U_1n+n(m-1)d=2U_1m+m(n-1)d$

គេទាញ $U_1=\frac{n(m-1)d-m(n-1)d}{2(m-n)}=\frac{d(mn-n-mn+m)}{2(m-n)}=\frac{d}{2}$

ព្រោះ $m\neq n$ ។

យើងបាន $U_m=\frac{d}{2}+(m-1)d=\frac{2m-1}{2}.d.$;$U_n=\frac{d}{2}+(n-1).d=\frac{2n-1}{2}.d$

គេបាន $\frac{U_m}{U_n}=\frac{\frac{2m-1}{2}.d}{\frac{2n-1}{2}.d}=\frac{2m-1}{2n-1}$ បើ $d\neq 0$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\frac{U_m}{U_n}=\frac{2m-1}{2n-1}}$ ។

III-ក-/កំនត់បីចំនួនពិត a,b

យើងបាន $\frac{1}{\sin x}=\frac{a\sin x}{1+\cos x}+\frac{b\sin x}{1-\cos x}$

$$\frac{1}{\sin x}=\frac{a\sin x(1-\cos x)+b\sin x(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}$$
$$\frac{1}{\sin x}=\frac{\sin x(a-a\cos x+b+b\cos x)}{\sin^2 x}$$
$$\frac{1}{\sin x}=\frac{(a+b)-(a-b)\cos x}{\sin x}$$

គេទាញបាន $\begin{cases}a+b=1\\a-b=0\end{cases}$ នាំឱ្យ $a=b=\frac{1}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{a=\frac{1}{2}\,,\,b=\frac{1}{2}}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល I រួចទាញរកតម្លៃ J

ចំពោះ $a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2}$ គេមាន $\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{2}\frac{\sin x}{1-\cos x}+\frac{1}{2}\frac{\sin x}{1+\cos x}$

គេបាន $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\frac{\sin x}{1-\cos x}+\frac{1}{2}\frac{\sin x}{1+\cos x}\right).dx$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1-\cos x}.dx+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}.dx$$

$$I=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\cos x)'}{(1-\cos x)}.dx-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+\cos x)'}{(1+\cos x)}.dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln|1-\cos x|\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\left[\ln|1+\cos x|\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln 1-\ln(1-\frac{1}{\sqrt{2}})\right]-\frac{1}{2}\left[\ln 1-\ln(1+\frac{1}{\sqrt{2}})\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\ln(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}})+\ln(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}})\right]=\frac{1}{2}\ln(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1})=\ln(\sqrt{2}+1)$$

ដូចនេះ $\boxed{I=\ln(1+\sqrt{2})}$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $J=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^3 x}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}.\frac{dx}{\sin^2 x}$

តាង $\begin{cases} u=\dfrac{1}{\sin x} \\ dv=\dfrac{dx}{\sin^2 x}\end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} du=-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x} \\ v=\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x}=-\cot x=-\frac{\cos x}{\sin x}\end{cases}$

គេបាន $J=\left[-\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}.dx$

$$J=\sqrt{2}-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 x}{\sin^3 x}.dx=\sqrt{2}-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^3 x}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x}$$

$J=\sqrt{2}-J+I$ នាំឱ្យ $J=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{I}{2}$ ដោយ $I=\ln(1+\sqrt{2})$

ដូចនេះ $\boxed{J=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})}$ ។

IV-បង្ហាញថា $1+\frac{1}{u_{n+1}}=\left(1+\frac{1}{u_n}\right)^4$

យើងមាន $1+\frac{1}{u_{n+1}}=1+\frac{4u_n^{\;3}+6u_n^{\;2}+4u_n+1}{u_n^{\;4}}$

$$=\frac{u_n^{\;4}+4u_n^{\;3}+6u_n^{\;2}+4u_n+1}{u_n^{\;4}}$$

$$=\frac{(u_n+1)^4}{u_n^{\;4}}=\left(1+\frac{1}{u_n}\right)^4$$

ដូចនេះ: $1+\frac{1}{u_{n+1}}=\left(1+\frac{1}{u_n}\right)^4$ ។

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងមាន $1+\frac{1}{u_{n+1}}=\left(1+\frac{1}{u_n}\right)^4$

គេបាន $\ln\left(1+\frac{1}{u_{n+1}}\right)=4\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$

តាង $v_n=\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$ នាំឲ្យ $v_{n+1}=\ln\left(1+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$

គេបាន $v_{n+1}=4v_n$ ។

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមាន

រេសុង $q=4$ និងតួ $v_0=\ln\left(1+\frac{1}{u_0}\right)=\ln 2$ (ព្រោះ $u_0=1$) ។

តាមរូបមន្ត $v_n=v_0.q^n=4^n\ln 2$ ។

ដោយ $v_n=\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$

គេទាញ $\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)=4^n\ln 2$ នាំឲ្យ $1+\frac{1}{u_n}=2^{4^n}$

ដូចនេះ $u_n=\frac{1}{2^{4^n}-1}$ ។

វិញ្ញាសាទី០៧

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-ក-កំនត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យ $\frac{1}{\cos x}=\frac{a\cos x}{1-\sin x}+\frac{b\cos x}{1+\sin x}$

ចំពោះគ្រប់ $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}$ ។

II-គេដឹងថា $\int_0^{x^2} f(2t-1).dt=4x^6$ ។ ចូររកអនុគមន៍ $f(x)$ ។

IIIគណនា $P_n=(1-x+x^2)(1-x^2+x^4).....(1-x^{2^n}+x^{2^{n+1}})$

IV-គេឲ្យស៊ីតនៃចំនួនពិត(U_n)កំនត់ដោយ $U_n=\sqrt{2}^n.\sin\frac{n\pi}{4}$

ដែល $n\in IN$ ។

ក-ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{2}.\cos\frac{(n+1)\pi}{4}=\cos\frac{n\pi}{4}-\sin\frac{n\pi}{4}$

ខ-ទាញឲ្យបានថា $U_n = (\sqrt{2})^n \cos\frac{n\pi}{4} - (\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$

គ-គណនាផលបូក ៖

$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots\dots\dots + U_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

I-ក/កំនត់ចំនួនពិត a និង b

គេបាន $\frac{1}{\cos x} = \frac{a\cos x}{1-\sin x} + \frac{b\cos x}{1+\sin x}$

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{a\cos x(1+\sin x) + b\cos x(1-\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$$

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x(a + a\sin x + b - b\sin x)}{1-\sin^2 x}$$

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x\left[(a+b) + (a-b)\sin x\right]}{\cos^2 x}$$

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{(a+b) + (a-b).\sin x}{\cos x}$$

គេទាញបាន $\begin{cases} a+b=1 \\ a-b=0 \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{a=\frac{1}{2}\ ,b=\frac{1}{2}}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}$

តាមសំរាយខាងលើ ចំពោះ $a=\frac{1}{2}$ និង $b=\frac{1}{2}$ គេមាន៖

$\frac{1}{\cos x}=\frac{a\cos x}{1-\sin x}+\frac{b\cos x}{1+\sin x}$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ ។

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x}.dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\cos x}{2(1-\sin x)}+\frac{\cos x}{2(1+\sin x)}\right].dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{1-\sin x}.dx+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{1+\sin x}.dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[-\frac{(1-\sin x)'}{(1-\sin x)}.dx\right]+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(1+\sin x)'}{(1+\sin x)}.dx$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\ln|1-\sin x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{2}\left[\ln|1+\sin x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\ln\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\ln 1\right]+\frac{1}{2}\left[\ln\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\ln 1\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)=\ln(\sqrt{2}+1)$$

II-រកអនុគមន៍ $f(x)$

គេមាន $\int_{0}^{x^2} f(2t-1).dt = 4x^6$

តាង $g(t) = f(2t-1)$ និង $G(t)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $g(t)$ ។

គេបាន $\int_{0}^{x^2} g(t).dt = 4x^6$

$$\left[G(t)\right]_0^{x^2} = 4x^6$$
$$G(x^2) - G(0) = 4x^6$$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរនៃទំនាក់ទំនងនេះគេបាន៖

$2x.G'(x^2) = 24x^5$ នាំឱ្យ $G'(x^2) = 12x^4$ ដោយ $G'(t) = g(t)$

គេទាញ $g(x^2) = 12x^4$ តែ $g(t) = f(2t-1)$

គេបាន $f(2x^2-1) = 12x^4$ តាង $2x^2 - 1 = y$ នាំឱ្យ $x^2 = \frac{y+1}{2}$

នាំឱ្យ $f(y) = 12\left(\frac{y+1}{2}\right)^2 = 3(y+1)^2$ ដូចនេះ $\boxed{f(x) = 3(x+1)^2}$

III-គណនា

$$P_n = (1 - x + x^2)(1 - x^2 + x^4).....(1 - x^{2^n} + x^{2^{n+1}})$$

គេមាន $1 + a^2 + a^4 = (1 + a^2)^2 - a^2 = (1 - a + a^2)(1 + a + a^2)$

គេទាញ $1 - a + a^2 = \dfrac{1 + a^2 + a^4}{1 + a + a^2}$ យក $a = x^{2^k}$

គេបាន $1 - x^{2^k} + x^{2^{k+1}} = \dfrac{1 + x^{2^{k+1}} + x^{2^{k+2}}}{1 + x^{2^k} + x^{2^{k+1}}}$

$$P_n = \prod_{k=0}^{n} \left(\frac{1 + x^{2^{k+1}} + x^{2^{k+2}}}{1 + x^{2^k} + x^{2^{k+1}}} \right) = \frac{1 + x^{2^{n+1}} + x^{2^{n+2}}}{1 + x + x^2}$$

ដូចនេះ $P_n = \dfrac{1 + x^{2^{n+1}} + x^{2^{n+2}}}{1 + x + x^2}$ ។

IV-ក/បង្ហាញថា $\sqrt{2}.\cos\dfrac{(n+1)\pi}{4} = \cos\dfrac{n\pi}{4} - \sin\dfrac{n\pi}{4}$

តាមរូបមន្ត $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

យើងបាន ៖

$$\sqrt{2}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}=\sqrt{2}\cos(\frac{n\pi}{4}+\frac{\pi}{4})$$

$$=\sqrt{2}(\cos\frac{n\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4})$$

$$\sqrt{2}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{n\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{n\pi}{4})=\cos\frac{n\pi}{4}-\sin\frac{n\pi}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{\sqrt{2}.\cos\frac{(n+1)\pi}{4}=\cos\frac{n\pi}{4}-\sin\frac{n\pi}{4}}$ ។

ខ-ទាញឲ្យបានថា $U_n=(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4}-(\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$

យើងមាន $\sqrt{2}.\cos\frac{(n+1)\pi}{4}=\cos\frac{n\pi}{4}-\sin\frac{n\pi}{4}$

នាំឲ្យ $\sin\frac{n\pi}{4}=\cos\frac{n\pi}{4}-\sqrt{2}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $(\sqrt{2})^n$

គេបាន $(\sqrt{2})^n\sin\frac{n\pi}{4}=(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4}-(\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{U_n=(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4}-(\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}}$ ។

គ-គណនាផលបូក $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n$

យើងបាន

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left[(\sqrt{2})^k \cos\frac{k\pi}{4} - (\sqrt{2})^{k+1}\cos\frac{(k+1)\pi}{4}\right]$$
$$= \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} - (\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = 1 - (\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}}$ ។

វិញ្ញាសាទី០៨

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-គេឲ្យ (x_n) និង (y_n) ជាស្វ៊ីតចំនួនពិតកំនត់លើ IN

ដោយ $x_0 = 5\,,\, y_0 = 1$ និងទំនាក់ទំនងកំនើន ៖

$x_{n+1} = x_n^{\ 3} + 3x_n y_n^{\ 2}$ និង $y_{n+1} = 3x_n^{\ 2} y_n + y_n^{\ 3}$ គ្រប់ $n \in IN$

ចូរគណនា x_n និង y_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

II-គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[0,1]$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x).dx$?

អនុវត្តន៍: ចូរគណនា $I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x.dx}{1+\cos^2 x}$ ។

III-ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 9 \\ \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{y}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{y}}\right) = 18 \end{cases}$

IV-គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$, $x\in IR$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(\frac{a+b}{1+a+b})<f(\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b})$

ចំពោះគ្រប់ $a>0,b>0$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-គណនា x_n និង y_n ជាអនុគមន៍នៃ n

គេមាន $x_{n+1}=x_n^{\ 3}+3x_ny_n^{\ 2}$ (1)

និង $y_{n+1}=3x_n^{\ 2}y_n+y_n^{\ 3}$ (2)

បូកសមីការ (1) និង (2) គេបាន ៖

$$x_{n+1}+y_{n+1}=(x_n+y_n)^3$$
$$\ln(x_{n+1}+y_{n+1})=3.\ln(x_n+y_n)$$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា $\{\ln(x_n+y_n)\}$ ជាស្ទីតធរណីមាត្រមាន

រេសុង $q=3$ និងតួដំបូង $\ln(x_0+y_0)=\ln 6$ ។

គេបាន $\ln(x_n+y_n)=3^n\ln 6$

គេទាញ $x_n + y_n = 6^{3^n}$ (3)

ដកកសមីការ (1) និង (2) គេបាន ៖

$$x_{n+1} - y_{n+1} = (x_n - y_n)^3$$
$$\ln(x_{n+1} - y_{n+1}) = 3.\ln(x_n - y_n)$$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា $\{\ln(x_n - y_n)\}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមាន

រេសុង $q = 3$ និងតួដំបូង $\ln(x_0 - y_0) = \ln 4$ ។

គេបាន $\ln(x_n - y_n) = 3^n \ln 4$ នាំឲ្យ $x_n - y_n = 4^{3^n}$ (4)

បូកសមីការ (3) និង (4) គេបាន $2x_n = 6^{3^n} + 4^{3^n}$

គេទាញ $x_n = \dfrac{6^{3^n} + 4^{3^n}}{2}$ ។

ដកសមីការ (3) និង (4) គេបាន $2y_n = 6^{3^n} - 4^{3^n}$

គេទាញ $y_n = \dfrac{6^{3^n} - 4^{3^n}}{2}$ ។

ដូចនេះ $x_n = \dfrac{6^{3^n} + 4^{3^n}}{2}$ និង $y_n = \dfrac{6^{3^n} - 4^{3^n}}{2}$ ។

II-បង្ហាញថា $\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x).dx$

តាង $x = \pi - t$ នាំឱ្យ $dx = -dt$

និង ចំពោះ $x \in [0, \pi]$ នាំឱ្យ $t \in [\pi, 0]$

គេបាន $\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = -\int_{\pi}^{0} (\pi - t).f[\sin(\pi - t)].dt$

$$\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = \int_0^{\pi} (\pi - t).f(\sin t).dt = \pi\int_0^{\pi} f(\sin t).dt - \int_0^{\pi} t.f(\sin t).dt$$

$$\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = \pi\int_0^{\pi} f(\sin x).dx - \int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx$$

នាំឱ្យគេទាញបាន $\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x).dx$ ។

អនុវត្តន៍: គណនា $I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x.dx}{1+\cos^2 x}$

គេមាន $I = \int_0^{\pi} \frac{x.\sin x.dx}{1+\cos^2 x} = \int_0^{\pi} x.\frac{\sin x.dx}{2-\sin^2 x} = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x.dx}{2-\sin^2 x}$

តាង $z=\cos x$ នាំឱ្យ $dz=-\sin x.dx$

ហើយចំពោះ $x\in[0,\pi]$ នោះ $z\in[1,-1]$

គេបាន $I=\frac{\pi}{2}\int_{1}^{-1}\frac{-dz}{1+z^2}=\frac{\pi}{2}[\arctan z]_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi^2}{4}$ ។

ដូចនេះ $\boxed{I=\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x.dx}{1+\cos^2 x}=\frac{\pi^2}{4}}$ ។

III-ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=9\\(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}})(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}})(1+\frac{1}{\sqrt[3]{y}})=18\end{cases}$$

ដោយប្រើឯកលក្ខណះភាព

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}})^3=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+3(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}})(1+\frac{1}{\sqrt[3]{y}})(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}})$$

$$(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}})^3=1+9+3(18)=64$$

គេទាញ $1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}}=4$ ឬ $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}}=3$

គេបាន $(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}})^3=27$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{3}{\sqrt[3]{x}.\sqrt[3]{y}}(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}})=27$$

$$9+\frac{3}{\sqrt[3]{xy}}(3)=27$$

$$1+\frac{1}{\sqrt[3]{xy}}=3$$

$$xy=\frac{1}{8}$$

គេបានប្រព័ន្ធ $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=9\\ xy=\frac{1}{8}\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}x+y=\frac{9}{8}\\ xy=\frac{1}{8}\end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយសមីការវ្យែត $z^2-\frac{9}{8}z+\frac{1}{8}=0$

គេទទួលបានគូចម្លើយ ($x=1$, $y=\frac{1}{8}$) ឬ ($x=\frac{1}{8}$, $y=1$) ។

IV-ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(\frac{a+b}{1+a+b}) < f(\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b})$

យើងមាន $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$, $x \in IR$

យើងបាន $f'(x)=\frac{(x+\sqrt{1+x^2})'}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}$

$$f'(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{(x+\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x^2})}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

ដោយ $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}>0$, $\forall x \in IR$

ដូចនេះអនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ IR ។

ម៉្យាងទៀតចំពោះគ្រប់ $a>0, b>0$ គេមាន ៖

$$\frac{a}{1+a+b}<\frac{a}{1+a} \quad \text{និង} \quad \frac{b}{1+a+b}<\frac{b}{1+b}$$

គេទាញ $\frac{a}{1+a+b}+\frac{b}{1+a+b}<\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}$

ឬ $\frac{a+b}{1+a+b}<\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}$

ដោយសារតែអនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ IR

ហេតុនេះតាមលក្ខណៈអនុគមន៍កើនគេបាន៖

$$\frac{a+b}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$$

នាំឲ្យ $f\left(\frac{a+b}{1+a+b}\right) < f\left(\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}\right)$

ដូចនេះ $f\left(\frac{a+b}{1+a+b}\right) < f\left(\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}\right)$

ចំពោះគ្រប់ $a > 0, b > 0$ ។

វិញ្ញាសាទី០៩

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-គេឲ្យសមីការ $ax^2+bx+c=0\ ,\ a\neq 0\ ,\ a\neq c$ ។

តាង $\tan\alpha$ និង $\tan\beta$ ជាឫសរបស់សមីការខាងលើ ។

ចូរគណនាតម្លៃនៃកន្សោម ៖

$$A=a\sin^2(\alpha+\beta)+b\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+c\cos^2(\alpha+\beta)$$

II-គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍គូលើ $[-a,a]$ ។

ក. ចូរបង្ហាញថា $\int_{-a}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_{0}^{a}f(x).dx\ ,\ q>0\ ,q\neq 1$ ។

ខ. អនុវត្តន៍ ៖ គណនា $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+3^x}.dx$ [redacted]

[redacted]

III-ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ចែកនឹង **8** ឱ្យសំណល់ **1** ។

ចំនួន n នោះចែកនឹង **5** ឱ្យសំណល់ **2** ។

ក-បើចំនួន n នោះចែកនឹង **40** ឱ្យសំណល់ប៉ុន្មាន **?**

ខ-រកចំនួន n នោះដោយដឹងថា $3940 < n < 4000$ ។

IV-ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ $f(x)$ និង $g(x)$ បើគេដឹងថា៖

$$f(2x-1)+2g(3x+1)=x^2$$

និង $f(4x-3)-g(6x-2)=-2x^2+2x+1$ ចំពោះគ្រប់ $x\in IR$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-គណនាតម្លៃនៃកន្សោម ៖

$$A=a\sin^2(\alpha+\beta)+b\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+c\cos^2(\alpha+\beta)$$

ដោយ $\tan\alpha$ និង $\tan\beta$ ជាឫសរបស់សមីការគេបាន ៖

$$\begin{cases} \tan\alpha + \tan\beta = -\dfrac{b}{a} \\ \tan\alpha . \tan\beta = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

យើងបាន $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{-\frac{b}{a}}{1-\frac{c}{a}} = -\dfrac{b}{a-c} = \dfrac{b}{c-a}$

យើងបាន $A = a\sin^2(\alpha+\beta) + b\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) + c\cos^2(\alpha+\beta)$

$$\begin{aligned} A &= \cos^2(\alpha+\beta)\left[\, a\tan^2(\alpha+\beta) + b\tan(\alpha+\beta) + c \,\right] \\ &= \frac{1}{1+\tan^2(\alpha+\beta)}\left[\, a\tan^2(\alpha+\beta) + b\tan(\alpha+\beta) + c \,\right] \\ &= \left[\frac{(c-a)^2}{(c-a)^2 + b^2}\right]\left(\frac{ab^2}{(c-a)^2} + \frac{b^2}{c-a} + c\right) \\ &= \frac{(c-a)^2}{(c-a)^2+b^2} \times \frac{ab^2 + b^2(c-a) + c(c-a)^2}{(c-a)^2} = c \end{aligned}$$

ដូចនេះ $A = a\sin^2(\alpha+\beta) + b\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) + c\cos^2(\alpha+\beta) = c$

II-ក.បង្ហាញថា $\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{f(x).dx}{1+q^x} = \int_0^a f(x).dx \ ,\ q>0 \ , q \neq 1$ ។

គេមាន $\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{f(x).dx}{1+q^x} = \int_{-a}^{0} \frac{f(x).dx}{1+q^x} + \int_0^a \frac{f(x).dx}{1+q^x} \quad (1)$

តាង $x=-t$ នាំឱ្យ $dx=-dt$ និងចំពោះ $x\in[-a,0]$ នាំឱ្យ $t\in[a,0]$

គេបាន $\int_{-a}^{0}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=-\int_{a}^{0}\frac{f(-t).dt}{1+q^{-t}}=\int_{0}^{a}\frac{q^t.f(-t)dt}{1+q^t}=\int_{0}^{a}\frac{q^x f(-x).dx}{1+q^x}$

ដោយ $f(x)$ ជាអនុគមន៍គូនោះ $f(-x)=f(x)\ ,\forall x\in[-a,a]$

គេទាញបាន $\int_{-a}^{0}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_{0}^{a}\frac{q^x.f(x)}{1+q^x}.dx\ (2)$

យក (2) ទៅជួសក្នុង (1) គេបាន៖

$$\int_{-a}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_{0}^{a}\frac{q^x.f(x).dx}{1+q^x}+\int_{0}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_{0}^{a}\frac{(q^x+1)f(x).dx}{1+q^x}=\int_{0}^{a}f(x).dx$$

ដូចនេះ $\int_{-a}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_{0}^{a}f(x).dx\ ,\ q>0\ ,q\neq 1$ ។

ខ. អនុវត្តន៍ ៖ គណនា $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+3^x}.dx$

ដោយ $\cos x$ ជាអនុគមន៍គូនោះគេបាន៖

$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x.dx=[\sin x]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=1-0=1$ ។ ដូចនេះ $\boxed{I=1}$ ។

III-ក. បើចំនួន n នោះចែកនឹង 40 ឱ្យសំណល់ប៉ុន្មាន ?

ឧបមាថា n ចែកនឹង 8 ឱ្យផលចែក $q_1 \in IN$ និងសំណល់ 1

និង ចំនួន n នោះចែកនឹង 5 ឱ្យផលចែក $q_2 \in IN$ និងសំណល់ 2

តាមអឺគ្លីត យើងបាន $\begin{cases} n = 8q_1 + 1 \\ n = 5q_2 + 2 \end{cases} \begin{array}{|l} (-15) \\ (16) \end{array}$

ឬ $\begin{cases} -15n = -120q_1 - 15 & (1) \\ 16n = 80q_2 + 32 & (2) \end{cases}$

បូកសមីការ (1) និង (2)

យើងបាន $n = 80q_2 - 120q_1 + 17 = 40q + 17$

ដែល $q = 2q_2 - 3q_1$ ។តាមទំនាក់ទំនង $n = 40q + 17$ បញ្ជាក់ថា

បើចំនួន n នោះចែកនឹង 40 ឱ្យសំណល់ $r = 17$

ខ. រកចំនួន n នោះដោយដឹងថា $3940 < n < 4000$

យើងមាន $n = 40q + 17$ ដោយ $3940 < n < 4000$

គេទាញ $3940 < 40q + 17 < 4000$

ឬ $98+\frac{3}{40}< n<100+\frac{17}{40}$

ដោយ $q\in IN$ នាំឱ្យគេទាញបាន $q=\{99\ ,\ 100\}$

ហើយ $n=\{3977\ ,4017\}$ ។

IV-កំនត់រកអនុគមន៍ $f(x)$ និង $g(x)$

គេមាន $f(2x-1)+2g(3x+1)=x^2 \quad (1)$

និង $f(4x-3)-g(6x-2)=-2x^2+2x+1 \quad (2)$

យើងតាង $2x-1=4t-3$ នាំឱ្យ $x=2t-1$

យក $x=2t-1$ ជួសក្នុង (1) គេបាន ៖

$$f[2(2t-1)-1]+2g[3(2t-1)+1]=(2t-1)^2$$
$$f(4t-3)+2g(6t-2)=4t^2-4t+1 \quad (3)$$

បើគេយក $x=t$ ជួសក្នុង(2) គេបាន

$$f(4t-3)-g(6t-2)=-2t^2+2t+1 \quad (4)$$

តាម **(3)** និង **(4)** គេបានប្រព័ន្ធ

$$\begin{cases} f(4t-3)+2g(6t-2)=4t^2-4t+1 \quad (3) \\ f(4t-3)-g(6t-2)=-2t^2+2t+1 \quad (4) \end{cases}$$

ដកសមីការ**(3)**និង**(4)**គេបាន

$3g(6t-2)=6t^2-6t$ នាំឱ្យ $g(6t-2)=2t^2-2$

យក $x=6t-2$ នាំឱ្យ $t=\dfrac{x+2}{6}$

ហើយ $g(x)=2(\dfrac{x+2}{6})^2-2=\dfrac{(x-4)(x+8)}{18}$

តាម **(4)**នាំឱ្យ $f(4t-3)-(2t^2-2)=-2t^2+2t+1$

នាំឱ្យ $f(4t-3)=2t-1$ យក $x=4t-3$ នាំឱ្យ $t=\dfrac{x+3}{4}$

គេទាញ $f(x)=2(\dfrac{x+3}{4})-1=\dfrac{x+1}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{f(x)=\dfrac{x+1}{2}\ ,\ g(x)=\dfrac{(x-4)(x+8)}{18}}$ ។

វិញ្ញាសាទី១០

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-គេឲ្យខ្សែកោង (C_m) : $y = f_m(x) = \dfrac{x^2 + 4mx - 4m^2 + 1}{m - x}$

ចូរបង្ហាញថាមានខ្សែកោងពីរនៃគ្រួសារខ្សែកោង (C_m)

ដែលកាត់តាមចំនុច $M_0(x_0\ ;y_0\ )$ ចំពោះគ្រប់ $(x_0\ ;y_0) \in IR^2$ ។

m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។

II-ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច $(O, \vec{i}, \vec{j})$ គេឱ្យបួនចំនុច A , B , C , D

ដែលមានអាហ្វិករៀងគ្នា

$Z_A = 1 + 6i$, $Z_B = 4 + 5i$, $Z_C = 5 + 4i$ និង $Z_D = -2 - 3i$ ។

ចូរស្រាយថាចតុកោណ $ABCD$ ចារិកក្នុងរង្វង់មួយដែលគេនឹងបញ្ជាក់ផ្ចិតនិង កាំរបស់វា ។

III-ដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការ $\begin{cases} 4^x \,.\, 5^y = \dfrac{1}{400} \\ 5^x \,.\, 6^y = \dfrac{1}{900} \end{cases}$

IV-គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 3x + 1}{3x^2 - 3x + 1}$

កំនត់ចំពោះគ្រប់ $x \in IR$ ។

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a និង b ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$f\left(\dfrac{1+a+b}{2}\right) \geq f\left(\dfrac{1+a+b+ab}{2+a+b}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-ការបង្ហាញ ៖

បើ $M_0 \in (C_m)$ គេបាន $y_0 = \dfrac{{x_0}^2 + 4mx_0 - 4m^2 + 1}{m - x_0}$

សមមូល $y_0(m - x_0) = {x_0}^2 + 4mx_0 - 4m^2 + 1$

$$my_0 - x_0y_0 = x_0^2 + 4mx_0 - 4m^2 + 1$$
$$4m^2 + (y_0 - 4x_0)m - x_0^2 - x_0y_0 - 1 = 0 \quad (1)$$

ឌីសគ្រីមីណង់នៃសមីការ (1) សរសេរ ៖

$$\Delta = (y_0 - 4x_0)^2 - 16(-x_0^2 - x_0y_0 - 1)$$
$$= y_0^2 - 8x_0y_0 + 16x_0^2 + 16x_0^2 + 16x_0y_0 + 16$$
$$= (y_0^2 + 8x_0y_0 + 16x_0^2) + 16(x_0^2 + 1)$$
$$= (y_0 + 4x_0)^2 + 16(x_0^2 + 1) > 0 \ ; \forall x_0, y_0 \in IR$$

ដោយ $\Delta > 0$ នាំឲ្យសមីការ (1) មានឫសពីរផ្សេងគ្នាជានិច្ច ។

ដូចនេះមានខ្សែកោងពីរនៃគ្រួសារខ្សែកោង (C_m)ដែលកាត់តាម

ចំនុច $M_0(x_0\,;y_0)$ ចំពោះគ្រប់ $(x_0\,;y_0) \in IR^2$ ។

II-ស្រាយថាចតុកោណ $ABCD$ចារិកក្នុងរង្វង់

យើងតាង $(c): x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

ជាសមីការរង្វង់ចារិកក្រៅត្រីកោណ ABC ។

យើងបាន $A \in (c)$ នាំឱ្យ $1^2 + 6^2 + a + 6b + c = 0$

ឬ $a+6b+c=-37 \quad (1)$

$B \in (c)$ នាំឱ្យ $4^2+5^2+4a+5b+c=0$

ឬ $4a+5b+c=-41 \quad (2)$

$C \in (c)$ នាំឱ្យ $(-2)^2+(-3)^2-2a-3b+c=0$

ឬ $-2a-3b+c=-13 \quad (3)$

យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} a+6b+c=-37 \\ 4a+5b+c=-41 \\ -2a-3b+c=-13 \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយប្រព័ន្ធនេះគេបានចម្លើយ

$a=-2$, $b=-2$, $c=-23$ ។

សមីការរង្វង់ចារិកក្រៅត្រីកោណ ABC អាចសរសេរ ៖

$(c): x^2+y^2-2x-2y-23=0$

ឬ $(c): (x-1)^2+(y-1)^2=25$

ម៉្យាងទៀតដោយយកកូអរដោនេ D ជួសក្នុងសមីការ

$(c):(-2-1)^2+(-3-1)^2=25$

វាផ្ទៀងផ្ទាត់នោះនាំឱ្យ $D\in(c)$ ។

ដោយបួនចំនុច A , B , C, D ស្ថិតនៅលើរង្វង់មានសមីការ

$(c):(x-1)^2+(y-1)^2=25$ តែមួយនោះនាំឱ្យចតុកោណ $ABCD$

ចារិកក្នុងរង្វង់ (c) មានផ្ចិត $I(1,1)$ និង កាំ $R=5$ ។

III-ដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការ ៖

$$\begin{cases} 4^x\,.\,5^y = \dfrac{1}{400} \\ 5^x\,.\,6^y = \dfrac{1}{900} \end{cases}$$

យើងមាន $\ln(4^x.5^y)=\ln(\dfrac{1}{400})$

ឬ $x\ln 4+y\ln 5=-2\ln 4-2\ln 5 \quad (1)$

ហើយ $\ln(5^x.6^y)=\ln(\dfrac{1}{900})$

ឬ $x\ln 5+y\ln 6=-2\ln 6-2\ln 5 \quad (2)$

តាម $(1)\&(2)$ គេបានប្រពន្ធ័ ខាងក្រោម

$$\begin{cases} x\ln 4 + y\ln 5 = -2\ln 4 - 2\ln 5 \\ x\ln 5 + y\ln 6 = -2\ln 6 - 2\ln 5 \end{cases} \left| \begin{matrix} (-\ln 6) \\ (\ln 5) \end{matrix} \right.$$

$$\begin{cases} -x\ln 4.\ln 6 - y\ln 5.\ln 6 = 2\ln 4.\ln 6 + 2\ln 5.\ln 6 & (3) \\ x\ln^2 5 + y\ln 5.\ln 6 = -2\ln 6.\ln 5 - 2\ln^2 5 & (4) \end{cases}$$

បូកសមីការ $(3)\&(4)$ គេបាន

$(\ln^2 5 - \ln 4.\ln 6)x = 2(\ln 4.\ln 6 - .\ln^2 5)$ នាំឱ្យ $x = -2$

តាមសមីការ $4^x.5^y = \frac{1}{400}$ គេទាញ $4^{-2}.5^y = \frac{1}{400}$

នាំឱ្យគេទាញ $y = -2$ ។ដូចនេះ $x = -2 , y = -2$ ។

IV-ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f\left(\frac{1+a+b}{2}\right) \geq f\left(\frac{1+a+b+ab}{2+a+b}\right)$

យើងមាន $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 3x + 1}{3x^2 - 3x + 1}$ កំនត់ចំពោះគ្រប់ $x \in IR$

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 6x - 3)(3x^2 - 3x + 1) - (6x - 3)(x^3 + 3x^2 - 3x + 1)}{(3x^2 - 3x + 1)^2}$$

$$= \frac{3x^4 - 6x^3 + 3x^2}{(3x^2 - 3x + 1)^2} = \frac{3x^2(x-1)^2}{(3x^2 - 3x + 1)^2} \geq 0 , \forall x \in IR$$

ដូចនេះ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនលើ IR ។

ម៉្យាងទៀតយើងសន្មតថា $\frac{1+a+b}{2} \geq \frac{1+a+b+ab}{2+a+b}$

គេបាន $\frac{2}{1+a+b} \leq \frac{2+a+b}{1+a+b+ab}$

$$\frac{2}{1+a+b} \leq \frac{(1+a)+(1+b)}{(1+a)(1+b)}$$

$$\frac{2}{1+a+b} \leq \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b}$$

ដោយ $\frac{1}{1+a+b} \leq \frac{1}{1+a}$ និង $\frac{1}{1+a+b} \leq \frac{1}{1+b}$ គ្រប់ a និង b ។

គេទាញ $\frac{2}{1+a+b} \leq \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b}$

នាំឲ្យ $\frac{1+a+b}{2} \geq \frac{1+a+b+ab}{2+a+b}$ ពិត ។

ដូចនេះតាមលក្ខណៈអនុគមន៍កើនគេទាញបាន ៖

$$f\left(\frac{1+a+b}{2}\right) \geq f\left(\frac{1+a+b+ab}{2+a+b}\right)$$ ។

វិញ្ញាសាទី១១

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-គេឲ្យ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទីបី ។

គេដឹងថា $P(x)+2$ ចែកដាច់នឹង $(x+1)^2$ ហើយ $P(x)-2$ ចែកដាច់នឹង $(x-1)^2$ ។ចូរកំនត់រកពហុធា $P(x)$ ។

II-ចូរដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការ $\begin{cases} 4^x.3^{y+1}+27^y=171 \\ 8^x+2^x.3^{1+2y}=172 \end{cases}$

III-គេឲ្យ $a_0=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$ និង $a_{n+1}=\dfrac{{a_n}^2-5}{2(a_n+2)}$

ចំពោះគ្រប់ $n\geq 0$ ។

ចូរស្រាយថា $a_n=\cot\left(\dfrac{2^{n-3}\pi}{3}\right)-2$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-កំនត់រកពហុធា $P(x)$៖

តាមបំរាប់គេអាចសរសេរ $\begin{cases} P(x)+2=(x+1)^2(ax+b) & (1) \\ P(x)-2=(x-1)^2(cx+d) & (2) \end{cases}$

គេបាន $\begin{cases} P(-1)+2=0 \\ P(1)-2=0 \end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases} P(-1)=-2 \\ P(1)=2 \end{cases}$

ដោយធ្វើដេរីវេលើ (1) និង (2) គេបាន ៖

$$\begin{cases} P'(x)=2(x+1)(ax+b)+a(x+1)^2 \\ P'(x)=2(x-1)(cx+d)+c(x-1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P'(x)=(x+1)[2(ax+b)+a(x+1)] & (3) \\ P'(x)=(x-1)[2(cx+d)+c(x-1) & (4) \end{cases}$$

តាម (3) នឹង (4)បញ្ជាក់ថា $P'(x)$ចែកដាច់នឹង $(x+1)(x-1)$

គេទាញ $P'(x)=k(x+1)(x-1)$

(ព្រោះ $P(x)$ជាពហុធាដឺក្រេទី៣)

គេបាន $P(x)=k\int(x^2-1).dx=k(\frac{x^3}{3}-x)+r$

ចំពោះ $x=\pm 1$ គេបាន $\begin{cases} P(-1)=\frac{2}{3}k+r=-2 \\ P(1)=-\frac{2}{3}k+r=2 \end{cases}$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធនេះគេបាន $k=3$, $r=0$

ដូចនេះ $P(x)=3\left(\frac{x^3}{3}-x\right)=x^3-3x$ ។

II-ដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការ ៖

$$\begin{cases} 4^x.3^{y+1}+27^y=171 & (1) \\ 8^x+2^x.3^{1+2y}=172 & (2) \end{cases}$$

ដោយបូកសមីការ (1) និង (2) អង្គនិងអង្គគេបាន ៖

$$8^x+4^x.3^{y+1}+2^x.3^{1+2y}+27^y=343$$
$$(2^x)^3+3(2^x)^2(3^y)+3(2^x)(3^y)^2+(3^y)^3=343$$
$$(2^x+3^y)^3=343$$
$$2^x+3^y=7 \quad (3)$$

ម៉្យាងទៀតដកសមីការ(1) និង (2) អង្គនិងអង្គគេបាន ៖

$$27^y - 2^x.3^{1+2y} + 4^x.3^{y+1} - 8^x = -1$$

$$(3^y)^3 - 3(3^y)^2(2^x) + 3(3^y)(2^x)^2 - (2^x)^3 = -1$$

$$(3^y - 2^x)^3 = -1$$

$$2^x - 3^y = 1 \quad (4)$$

តាម (3) និង (4) យើងបានប្រពន្ធ័ ៖

$$\begin{cases} 2^x + 3^y = 7 & (3) \\ 2^x - 3^y = 1 & (4) \end{cases}$$

បូកសមីការ(3) និង (4) គេបាន $2.2^x = 8$ នាំឲ្យ

ដកសមីការ(3) និង (4) គេបាន $2.3^y = 6$ នាំឲ្យ $y = 1$ ។

ដូចនេះ $x = 2$, $y = 1$ ។

III-ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a_n = \cot\left(\frac{2^{n-3}\pi}{3}\right) - 2$

ចំពោះ $n = 0$ គេបាន $a_0 = \cot\frac{\pi}{24} - 2$

$$\cot\frac{\pi}{24}=\frac{\cos\frac{\pi}{24}}{\sin\frac{\pi}{24}}=\frac{2\cos^2\frac{\pi}{24}}{2\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{12}}$$

$$=\frac{1+\cos(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}{\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}=\frac{1+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}=\frac{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$

$$\cot\frac{\pi}{24}=\frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})+(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{4}$$

$$=\frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})+8+4\sqrt{3}}{4}$$

$$=2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$$

គេទាញ $a_0=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$

ហេតុនេះ $a_n=\cot\left(\frac{2^{n-3}\pi}{3}\right)-2$ ពិតចំពោះ $n=0$ ។

សន្មតថាវាពិតដល់តួទី k គឺ $a_k=\cot\left(\frac{2^{k-3}\pi}{3}\right)-2$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ ៖

$$a_{k+1}=\cot\left(\frac{2^{k-2}\pi}{3}\right)-2$$ ពិត ។

យើងមាន $a_{k+1}=\dfrac{a_k^{\ 2}-5}{2(a_k+2)}$ ដោយ $a_k=\cot\left(\dfrac{2^{k-3}\pi}{3}\right)-2$

នោះ $$a_{k+1}=\frac{\left[\cot\left(\frac{2^{k-3}\pi}{3}\right)-2\right]^2-5}{2\cot\left(\frac{2^{k-3}\pi}{3}\right)}$$

$$a_{k+1}=\frac{\cot^2\left(\frac{2^{k-3}\pi}{3}\right)-4\cot\left(\frac{2^{k-3}\pi}{3}\right)-1}{2\cot\left(\frac{2^{k-3}\pi}{3}\right)}$$

$$=\frac{\cot^2\left(\frac{2^{k-3}\pi}{3}\right)-1}{2\cot\left(\frac{2^{k-3}\pi}{2}\right)}-2$$

ដោយប្រើរូបមន្ត $\cot 2a = \dfrac{\cot^2 a - 1}{2\cot a}$

គេបាន $a_{k+1} = \cot\left(\dfrac{2^{k-2}\pi}{3}\right) - 2$ ពិត ។

ដូចនេះ $a_n = \cot\left(\dfrac{2^{n-3}\pi}{3}\right) - 2$ ។

វិញ្ញាសាទី១២

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-គេឱ្យ $A=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+i\right)^n-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-i\right)^n$, $n\in IN$ ។

ចូរបង្ហាញថា $A=i.\frac{2^{n+1}}{(\sqrt{3})^n}.\sin\frac{n\pi}{3}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ ។

II-គេឱ្យចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

គេដឹងថា n ចែកនឹង 7 ឱ្យសំណល់ 5 ហើយ n ចែកនឹង 8 ឱ្យសំណល់ 3 ។

ក. តើចំនួន n នោះចែកនឹង 56 ឱ្យសំណល់ប៉ុន្មាន ?

ខ. រកចំនួន n នោះដោយដឹងថា $5616 < n < 5626$ ។

III-គេឱ្យអាំងតេក្រាល

$$I_0=\int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^2} \quad \text{និង} \quad I_n=\int_0^1 \frac{t^n}{1+t+t^2}.dt \quad ,\ (n\in IN)$$

ក. ចូរគណនាតម្លៃនៃ I_0 រួច ស្រាយថា (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $I_n+I_{n+1}+I_{n+2}=\frac{1}{n+1}$ ។

គ. ទាញឱ្យបានថា $\frac{1}{3(n+1)}\le I_n\le\frac{1}{3(n-1)}\ ,\forall n\ge 2$ ។

ទាញរកលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}(n\,I_n)$ ។

IV-គេឲ្យ a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 ជាចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

$$\frac{a_1}{k^2+1}+\frac{a_2}{k^2+2}+\frac{a_3}{k^2+3}+\frac{a_4}{k^2+4}+\frac{a_5}{k^2+5}=\frac{1}{k^2}$$

ចំពោះ $k=1,2,3,4,5$ ។

ចូរកំនត់តម្លៃ $\frac{a_1}{37}+\frac{a_2}{38}+\frac{a_3}{39}+\frac{a_4}{40}+\frac{a_5}{41}$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-បង្ហាញថា $A = i.\frac{2^{n+1}}{(\sqrt{3})^n}.\sin\frac{n\pi}{3}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ ។

យើងមាន $A = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + i\right)^n - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - i\right)^n$, $n \in IN$

តាង $Z = \frac{1}{\sqrt{3}} + i = \frac{1 + i.\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3}\right)$

តាមរូបមន្តដឺម័រគេបាន $Z^n = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + i\right)^n = \frac{2^n}{(\sqrt{3})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3} + i.\sin\frac{n\pi}{3}\right)$

ហើយ $\bar{Z}^n = \frac{2^n}{(\sqrt{3})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3} - i.\sin\frac{n\pi}{3}\right)$

គេទាញ $A = \frac{2^n}{(\sqrt{3})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3} + i.\sin\frac{n\pi}{3}\right) - \frac{2^n}{(\sqrt{3})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3} - i.\sin\frac{n\pi}{3}\right)$

$$= \frac{2^n}{(\sqrt{3})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3} + i.\sin\frac{n\pi}{3} - \cos\frac{n\pi}{3} + i.\sin\frac{n\pi}{3}\right) = i.\frac{2^{n+1}}{(\sqrt{3})^n}.\sin\frac{n\pi}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{A = i.\frac{2^{n+1}}{(\sqrt{3})^n}.\sin\frac{n\pi}{3}}$ ។

II-ក. តើចំនួន $\mathbf{n}$ នោះចែកនឹង **56** ឱ្យសំណល់ប៉ុន្មាន ?

តាមសម្មតិកម្មគេដឹងថា $\mathbf{n}$ ចែកនឹង 7 ឱ្យសំណល់ 5 នាំឱ្យមាន

$\mathbf{q_1 \in IN}$ ដែល $\mathbf{n = 7q_1 + 5 \ \ (1)}$

ហើយម្យ៉ាងទៀត $\mathbf{n}$ ចែកនឹង **8** ឱ្យសំណល់ 3 នោះនាំឱ្យមាន

$\mathbf{q_2 \in IN}$ ដែល $\mathbf{n = 8q_2 + 3 \ \ (2)}$

តាម (1) និង (2) គេបានប្រព័ន្ធ $\begin{cases} \mathbf{n = 7q_1 + 5 \ (1)} \\ \mathbf{n = 8q_2 + 3 \ (2)} \end{cases}$

ឬ $\begin{cases} \mathbf{8n = 56q_1 + 40 \ (3)} \\ \mathbf{7n = 56q_2 + 21 \ (4)} \end{cases}$

ដកសមីការ (3) និង (4) គេបាន $\mathbf{n = 56(q_1 - q_2) + 19}$

តាង $\mathbf{q = q_1 - q_2 \ \ , q \in IN}$

គេបាន $\mathbf{n = 56q + 19}$ ។

ទំនាក់ទំនងនេះមានន័យថាចំនួន $\mathbf{n}$ នោះចែកនឹង 56 ឱ្យសំណល់ 19

ខ. រកចំនួន n នោះដោយដឹងថា $5616 < n < 5626$

គេមាន $n = 56q + 19$ នាំឱ្យ $5616 < 56q + 19 < 5626$

ឬ $\frac{5597}{56} < q < \frac{5607}{56}$ ឬ $99 + \frac{53}{56} < q < 100 + \frac{7}{56}$

នាំឱ្យ $q = 100$ ។

ចំពោះ $q = 100$ គេបាន $n = 5600 + 19 = 5619$ ។

III-ក. គណនាតម្លៃនៃ I_0 រួច ស្រាយថា (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ

យើងបាន $I_0 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{\frac{3}{4} + (\frac{1}{2} + t)^2}$

តាង $U = \frac{1}{2} + t$ នាំឱ្យ $dU = dt$

ហើយចំពោះ $\forall t \in [0,1]$ នោះ $U \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$

គេបាន $I_0 = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dU}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + U^2} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2U}{\sqrt{3}}\right)\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\sqrt{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$ ។

ដូចនេះ $I_0=\int_0^1\frac{dt}{1+t+t^2}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ ។

ម៉្យាងទៀតគេមាន $I_n=\int_0^1\frac{t^n}{1+t+t^2}.dt$ និង $I_{n+1}=\int_0^1\frac{t^{n+1}}{1+t+t^2}.dt$

ចំពោះគ្រប់ $t\in[0,1]$ គេមាន $t^{n+1}\le t^n$ នាំឱ្យ $\frac{t^{n+1}}{1+t+t^2}\le\frac{t^n}{1+t+t^2}$

គេទាញ $\int_0^1\frac{t^{n+1}}{1+t+t^2}.dt\le\int_0^1\frac{t^n}{1+t+t^2}.dt$ ឬ $I_{n+1}\le I_n\ ,\forall n\in IN$ ។

ដូចនេះ (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $I_n+I_{n+1}+I_{n+2}=\frac{1}{n+1}$

យើងបាន $I_n+I_{n+1}+I_{n+2}=\int_0^1\frac{t^n dt}{1+t+t^2}+\int_0^1\frac{t^{n+1}dt}{1+t+t^2}+\int_0^1\frac{t^{n+2}dt}{1+t+t^2}$

$$=\int_0^1\frac{(t^n+t^{n+1}+t^{n+2})dt}{1+t+t^2}=\int_0^1\frac{t^n(1+t+t^2).dt}{1+t+t^2}$$

$$=\int_0^1 t^n dt=\left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}$$

ដូចនេះ $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ ។

គ. ទាញឱ្យបានថា $\frac{1}{3(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{3(n-1)}$, $\forall n \ge 2$

យើងមាន (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ។ តាមលក្ខណៈនៃស្វ៊ីតចុះយើងមាន៖

$$I_n + I_{n+1} + I_{n+2} \le 3I_n \le I_{n-2} + I_{n-1} + I_n$$

ដោយ $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ នាំឱ្យ $I_{n-2} + I_{n-1} + I_n = \frac{1}{n-1}$

គេទាញ $\frac{1}{n+1} \le 3I_n \le \frac{1}{n-1}$ នាំឱ្យ $\frac{1}{3(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{3(n-1)}$, $\forall n \ge 2$ ។

ដូចនេះ $\frac{1}{3(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{3(n-1)}$, $\forall n \ge 2$ ។

ទាញរកលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}(n I_n)$:

មាន $\frac{1}{3(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{3(n-1)}$, $\forall n \ge 2$

នាំឱ្យ $\frac{n}{3(n+1)} \le nI_n \le \frac{n}{3(n-1)}$ ។ ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(nI_n\right) = \frac{1}{3}$ ។

IV-កំនត់តម្លៃ $\frac{a_1}{37}+\frac{a_2}{38}+\frac{a_3}{39}+\frac{a_4}{40}+\frac{a_5}{41}$

តាងអនុគមន៍

$$f(x)=\left(\frac{a_1}{x+1}+\frac{a_2}{x+2}+\frac{a_3}{x+3}+\frac{a_4}{x+4}+\frac{a_5}{x+5}-\frac{1}{x}\right)\prod_{p=0}^{5}(x+p) \quad (1)$$

ដែល $x=x=1\ ,\ 4\ ,\ 9\ ,\ 16\ ,\ 25$

គេបាន $f(1)=f(4)=f(9)=f(16)=f(25)=0$

នាំឲ្យអនុគមន៍ f អាចសរសេរមួយបែបទៀតជារាង

$$f(x)=c(x-1)(x-4)(x-9)(x-16)(x-25) \ (2)$$

តាម (1) គេទាញបាន៖ $\lim_{x\to 0} f(x)=1\times 2\times 3\times 4\times 5\times (0-1)=-120$

តាម (2) គេទាញបាន៖

$$\lim_{x\to 0} f(x)=c.(-1)(-4)(-9)(-16)(-25)=-(120)^2 c$$

គេបានសមីការ $-(120)^2 .c=-120 \Rightarrow c=\frac{1}{120}$

គេបាន $f(x)=\frac{1}{120}(x-1)(x-4)(x-9)(x-16)(x-25)$

បើ $x=36\Rightarrow f(36)=\frac{35.32.27.20.11}{120}$ (3)

តាម (1) បើ $x=36$ គេបាន

$$f(36)=36.37.38.39.40.41\left(\frac{a_1}{37}+\frac{a_2}{38}+...+\frac{a_5}{41}-\frac{1}{36}\right)\ (4)$$

តាម (3) និង (4) គេទាញបាន

$$\frac{a_1}{37}+\frac{a_2}{38}+...+\frac{a_5}{41}=\frac{1}{36}+\frac{35.32.27.20.11}{120.36.37.38.39.40.41}$$

ដូចនេះ $\frac{a_1}{37}+\frac{a_2}{38}+\frac{a_3}{39}+\frac{a_4}{40}+\frac{a_5}{41}=\frac{187465}{6744582}$ ។

វិញ្ញាសាទី១៣

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-គណនាផលបូក

$S_n = 1.1! + 2.2! + 3.3! + ... + n.n!$

ដែល $n! = n(n-1)(n-2)....3.2.1$ ។

II-ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} x + y = \sqrt[3]{a+b} \\ x^4 - y^4 = ax - by \end{cases}$

ដែល a និង b ជាចំនួនពិតដែល $a + b \neq 0$ ។

III-គេឲ្យស្វ៊ីត $\{a_n\}$ កំនត់ដោយ ៖

$a_0 = 1$ និង $a_{n+1} = a_0.a_1....a_n + 4$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $a_n - \sqrt{a_{n+1}} = 2$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ ។

IV-គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x.dx$ ដែល $n = 0 , 1 , 2,...$

ក/ស្រាយថា (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ រួចគណនា $I_n + I_{n+2}$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ/បង្ហាញថា $\frac{1}{2(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{2(n-1)}$ គ្រប់ $n \ge 2$ ។

គ/គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}(nI_n)$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-គណនាផលបូក

$$S_n = 1.1! + 2.2! + 3.3! + ... + n.n!$$

គេមាន $k.k! = [(k+1)-1].k!$

$$k.k! = (k+1).k! - k!$$
$$k.k! = (k+1)! - k!$$

គេបាន $S_n = (2!-1!) + (3!-2!) + (4!-3!) + ... + (n+1)! - n!$

ដូចនេះ $S_n = (n+1)! - 1$ ។

II-ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} x+y=\sqrt[3]{a+b} \\ x^4-y^4=ax-by \end{cases} \text{ សមមូល } \begin{cases} a+b=(x+y)^3 \\ ax-by=x^4-y^4 \end{cases} \begin{vmatrix} y \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} ay+by=y(x+y)^3 \\ ax-by=x^4-y^4 \end{cases} +$$

$$a(x+y)=y(x+y)^3+x^4-y^4$$

ដោយ $a+b\neq 0$ នោះ $x+y\neq 0$

គេទាញ $a=\dfrac{y(x+y)^3+x^4-y^4}{x+y}=x^3+3xy^2$

ហើយ $b=(x+y)^3-a=3x^2y+y^3$

គេបានប្រព័ន្ធ $\begin{cases} x^3+3xy^2=a \\ 3x^2y+y^3=b \end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases} x+y=\sqrt[3]{a+b} \\ x-y=\sqrt[3]{a-b} \end{cases}$

ដូចនេះ $x=\dfrac{\sqrt[3]{a+b}+\sqrt[3]{a-b}}{2}$; $y=\dfrac{\sqrt[3]{a+b}-\sqrt[3]{a-b}}{2}$ ។

III-បង្ហាញថា $a_n-\sqrt{a_{n+1}}=2$

យើងសង្កេតឃើញថាគ្រប់ $k\in IN$ គេមាន $a_k>0$ ។

គេមាន $a_{n+1} = a_0.a_1....a_n + 4$

គេបាន $a_{n+2} = a_0.a_1.....a_{n+1} + 4$

$$a_{n+2} = (a_0.a_1.....a_n)(a_0.a_1.....a_n + 4) + 4$$
$$a_{n+2} = (a_0a_1.....a_n)^2 + 4(a_0.a_1....a_n) + 4$$
$$a_{n+2} = (a_0a_1.....a_n + 2)^2$$

គេទាញ $\sqrt{a_{n+2}} = a_0a_1.....a_n + 2$

$\sqrt{a_{n+2}} = (a_{n+1} - 4) + 2$ ឬ $a_{n+1} - \sqrt{a_{n+2}} = 2$

ដូចនេះ $a_n - \sqrt{a_{n+1}} = 2$ ។

IV- ក/ស្រាយថា (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ

គ្រប់ $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ គេមាន $0 \le \tan x \le 1$

គេបាន $\forall n \in IN : \cot^{n+1} x \le \cot^n x$ នាំឲ្យ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+1} x \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x.dx$

ដូចនេះ (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ។

គណនា $I_n + I_{n+2}$ ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

គេបាន $I_n + I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan^2 x)\tan^n x.dx$

តាង $u = \tan x \Rightarrow du = (1+\tan^2 x).dx$

ចំពោះ $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ នោះ $u \in [0, 1]$

គេបាន $I_n + I_{n+2} = \int_0^1 u^n du = \left[\frac{1}{n+1}u^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

ដូចនេះ $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ ។

ខ/បង្ហាញថា $\frac{1}{2(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{2(n-1)}$ គ្រប់ $n \ge 2$ ៖

មាន $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ នោះ $I_{n-2} + I_n = \frac{1}{n-1}$ គ្រប់ $n \ge 2$ ។

ដោយ (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះនោះគេបាន $I_{n+2} \le I_n \le I_{n-2}$

គេទាញ $\frac{I_n + I_{n+2}}{2} \le I_n \le \frac{I_{n-2} + I_n}{2}$

ដូចនេះ $\frac{1}{2(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{2(n-1)}$ គ្រប់ $n \ge 2$ ។

គ/គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}(nI_n)$ ៖

ដោយ $\frac{1}{2(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{2(n-1)}$ គ្រប់ $n \ge 2$

គុណអង្គទាំងពីរនៃវិសមភាពនឹង n គេបាន ៖

$\frac{n}{2(n+1)} \le nI_n \le \frac{n}{2(n-1)}$ ដោយ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{2(n-1)} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}(nI_n) = \frac{1}{2}$ ។

ឈឈឈ❄ឈឈឈ